Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE: Programa de Engenharia de Produção
Área de Pesquisa Operacional – PO
Escola Politécnica: Departamento de Engenharia Industrial

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS
E
TEORIA DE FILAS

Prof. Virgílio José Martins Ferreira Filho

ÍNDICE

1. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

1.1. DESCRIÇÃO E DEFINIÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Segundo Lieberman, "um **processo estocástico** é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas (X_t), onde t é um índice definido num conjunto T." Assim, um processo estocástico é a descrição de um fenômeno aleatório que varia com o tempo.

O processo estocástico $X_1, X_2, X_3...$, pode representar a coleção das quantidades de carros que passam por um determinado ponto de uma rodovia, a evolução dos níveis de estoque semanais de uma firma, o comportamento de uma partícula de gás, variações nas qualidades dos produtos, variações nos preços de ações, vendas numa determinada loja, evolução do número de desempregados num determinado país, etc.

O processo estocástico $Y_1, Y_2, Y_3,...$ representa a evolução populacional brasileira, desde o ano de 1998 como mostra a Tabela 1.1:

Tabela 1.1 – Evolução populacional brasileira

	1998	1999	2000	2001	2002	...
Habitantes	161.790.311	163.947.554	169.590.693	172.385.826	174.632.960	...

(Fonte: Denatran)

Os valores assumidos por um processo estocástico são denominados estados e o conjunto de todos os estados possíveis é dito espaço de estados.

1.1.1. PROCESSO ESTOCÁSTICOS CONTÍNUOS / DISCRETOS

Os processos estocásticos podem ser classificados como:

a) Em relação ao Estado:
- Estado Discreto (cadeia): X(t) é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.
- Estado Contínuo: caso contrário.

b) Em relação ao Tempo:
- Tempo Discreto: t é finito ou enumerável.
- Tempo Contínuo: caso contrário.

Notação:
- Processo em tempo contínuo: {X(t), t ≥ 0}
- Processo em tempo discreto: {X(t), t = 1, 2, 3, ...}

Exemplos:

- Estado Discreto e Tempo Contínuo: número de usuários em uma fila de banco em um determinado instante, colisões entre duas partículas no intervalo de 2 minutos;
- Estado Contínuo e Tempo Contínuo: nível de uma represa observado em um intervalo de tempo;
- Estado Discreto e Tempo Discreto: número de máquinas avariadas no fim do dia, Quantidade de barris petróleo produzidas ao final do dia por uma determinada multinacional;
- Estado Contínuo e Tempo Discreto: cotação de uma ação no fim do dia.

1.1.2. DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Para um dado valor de t, o processo estocástico X(t) é uma variável aleatória, e a obtenção de sua distribuição de probabilidade é feita como qualquer outra variável aleatória. Entretanto, quando t varia ao longo do conjunto T, a informação X(t) não é fornecida por uma simples distribuição para um dado t. Para uma informação completa do processo precisamos da distribuição conjunta {X(t), t $\in$ T}. Com isso podemos prever o comportamento do processo no futuro, conhecendo o comportamento no passado.

Quando t é contínuo, obter essa distribuição conjunta é impossível, já que o conjunto t é não-enumerável. Sob essas circunstâncias, é válido assumir que o comportamento do processo pode ser obtido estudando-o em um conjunto discreto de pontos, assim a distribuição conjunta definida nesse conjunto de pontos é apropriada.

Seja (t1, t2,...,tn), com t1 < t2 < ...< tn, um conjunto discreto de pontos de T. A distribuição conjunta do processo X(t) nesses pontos pode ser definida como segue:

$$P[X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, ..., X_{t_n} \leq x_n] \qquad (1)$$

A probabilidade do processo estocástico estar no tempo t no estado a_t é chamada **probabilidade de estado** (P_t) e é definida por:

$$P_t = P[X_t = a_t] \qquad (2)$$

O vetor p = [$p_1 \quad p_2 \quad ... \quad p_n \quad ...$] é chamado **vetor de probabilidade de estado.**

A probabilidade do processo estocástico (com tempo e estado discretos) estar no estado j, dado que estava no estado i, é chamada **probabilidade de transição** ($P_{ij}^{m,n}$).

$$P_{ij}^{m,n} = P[X_n = j \mid X_m = i], m < n \qquad (3)$$

Para o caso contínuo, a **probabilidade condicional de transição e a probabilidade de estado** são definidas, respectivamente, como segue:

$$F(x_0, x_1, t_0, t_1) = P[X(t_1) \leq x_1 \mid X(t_0) = x_0] \qquad (4)$$

$$F(x,t) = P[X(t) \leq x] \qquad (5)$$

A matriz que armazena todas as probabilidades de transição $P_{ij}^{(m,n)}$ é chamada matriz de probabilidade de transição $P^{(m,n)} = [p_{ij}^{(m,n)}]$.

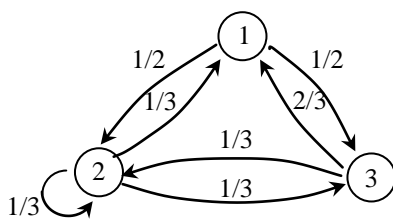
Um processo é dito homogêneo (no tempo) se a transição depende de t, mas não depende de t_0. Nesse caso temos:

$$F(x_0, x_1, t_0, t_0 + t) = F(x_0, x, 0, t) \quad \forall t_0$$

O correspondente para estado e tempo discretos é

$$P_{ij}^{(m,n)} = P_{ij}^{(n-m)}$$

Diagrama de Transição de Estados

Ë o grafo valorado representativo do processo estocástico, onde o conjunto de vértices está associado ao conjunto de estados e seus valores as respectivas probabilidades de estado. O Conjunto de arcos, por sua vez, está associado as possíveis transições e é valorado pelas probabilidades de transição.

1.1.3. ALGUNS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS IMPORTANTES

- **Processo de WEINER (Movimento Browniano):** a disposição de uma partícula suspensa em um fluido, sujeita a sucessivas colisões com partículas vizinhas é um exemplo clássico do processo de Weiner. O fenômeno físico foi descoberto pelo botânico Robert Brown em 1827. A teoria do comportamento desse processo foi desenvolvida por Einstein (1906) e Weiner (1923).

- **Processo de Poisson**: o processo estocástico {X(t)} tal que $P[X(t)=k]=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$ é denominado processo de Poisson. Esse processo modela, razoavelmente bem, o número de chamadas numa cabine telefônica, por exemplo.

- **Processo de Renovação:** um exemplo desse processo é a vida útil de um equipamento onde uma peça que falha é substituída por uma peça igual.

- **Processo de Markov:** nesse processo toda história passada é resumida no estado atual (memória de curto prazo).

1.2. CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO DISCRETO

Um processo estocástico é dito ter a propriedade **Markoviana** se:

$$P[X_{t+1}=j \mid X_t=i; X_{t-1}=k_{t-1};...; X_1=k_1, X_0=k_0]=P[X_{t+1}=j \mid X_t=i] \qquad (6)$$

para t = 0, 1, ... e qualquer seqüência $i, j, k_0, ..., k_{t-1}$.

A expressão acima, equivale a dizer que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente $X_t=i$, é independente do evento passado e depende somente do estado presente do processo. Ou seja, um processo estocástico é dito ser um processo Markoviano, se o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados.

Esse tipo de processo estocástico é também denominado de processo sem memória. Se, para cada *i* e *j*

$$P[X_{t+1}=j \mid X_t=i]=P[X_1=j \mid X_0=i], \quad para \quad todos \quad t=0,1,...$$

então, as *probabilidades de transição em um estágio* são ditas serem **estacionárias** e são denotadas por p_{ij}. Isso implica que as probabilidades de transição não mudam no tempo.

Um processo estocástico X_t (t = 0, 1, ...) é dito ser uma cadeia de Markov em tempo discreto se tiver o seguinte:

1- Satisfizer a propriedade de Markov

2- Possuir espaço de estados enumerável.

No presente curso, focaremos nossas atenções em cadeias de Markov que apresentem as seguintes propriedades.:

1- Um número finito de estados,
2- A propriedade markoviana,
3- Probabilidades de transição estacionárias,
4- Um conjunto de probabilidades iniciais $P(X_0 = i)$ para todo *i.*

1.2.1. PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO EM VÁRIOS ESTÁGIOS

A existência de probabilidades de transição estacionárias em um estágio também implica que, para cada *i, j* e *n* (*n* = 0, 1, 2,...),

$$P[X_{t+n} = j \mid X_t = i] = P[X_n = j \mid X_0 = i], \quad para \quad todos \quad t = 0,1,...$$

Estas probabilidades condicionais são usualmente denotadas por $p_{ij}^{(n)}$ e são chamadas de *probabilidades de transição em n estágios*. Os processos com essas características são também chamados de processos homogêneos no tempo.

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j \mid X_0 = i]$$

A matriz que armazena as probabilidades de transição em *n* estágios é denotada por $P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]$.

Seja $p_{ij}^{(2)}$ a probabilidade de transição do estado i para o estado j em 2 estágios, como mostra a Figura 1.1 a seguir.

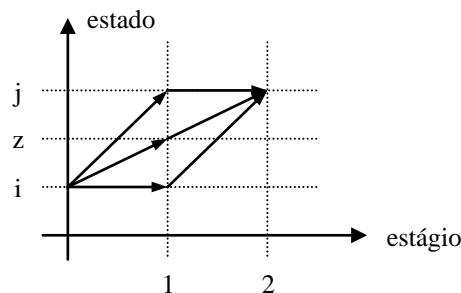



Figura 1.1 – Probabilidade de Transição do estado i para o estado j em 2 estágios

Podemos escrever:

$$p_{ij}^{(2)} = p_{ii}^{(1)} p_{ij}^{(1)} + p_{iz}^{(1)} p_{zj}^{(1)} + p_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(1)}$$

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{\substack{k=i,z,j \\ k \in S}} p_{ik}^{1} p_{kj}^{1}$$, para cada i, j.

Em notação matricial:

$$P^{(2)} = P^{(1)} P^{(1)} = PP = P^2,$$

onde:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Analogamente:

$$P_{ij}^{(3)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^2 p_{kj}^1$$, para cada i, j.

$$P^{(3)} = P^{(2)} P^{(1)} = P^{(1)} P^{(2)} = P^2 P = P^3$$

De uma maneira geral, podemos estabelecer a **equação de Chapman-Kolmogorov**:

$$P^{(n)} = P^{(n-k)} P^{(k)} = P^n \qquad (7)$$

Seja $p_j^{(1)}$ a probabilidade de estar no estado j no instante 1, como mostra a Figura 1.2:

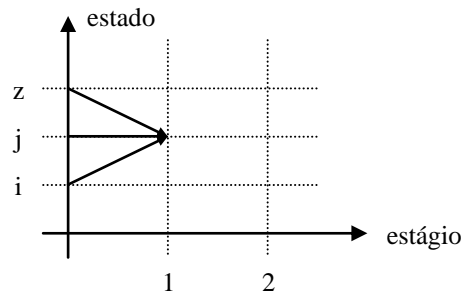



Figura 1.2 – Probabilidade de estar no estado j no instante 1

Podemos escrever:

$$p_j^{(1)} = p_i^{(0)} p_{ij}^{(1)} + p_j^{(0)} p_{jj}^{(1)} + p_z^{(0)} p_{zj}^{(1)}$$

$$p_j^{(1)} = \sum_{i \in S} p_i^{(0)} p_{ij}^{(1)}$$, para cada i, j.

Em notação matricial:

$$p^{(1)} = p^{(0)}P^{(1)} = p^{(0)}P$$

De uma maneira geral, podemos estabelecer o vetor de estado no instante n:

$$p^{(n)} = p^{(n-k)}P^{(k)}$$

1.2.2. PROBABILIDADE DE PRIMEIRA PASSAGEM E PRIMEIRO RETORNO

Seja a igualdade:

$$f_{ij}^{(n)} = P[X_n = j, X_{n-1} \neq j; X_{n-2} \neq j; ...; X_1 \neq j; | \ X_0 = i]$$

Se $j \neq i$, $f_{ij}^{(n)}$ é a **probabilidade de 1ª passagem**, isto é a probabilidade de que o processo esteja no estado *j*, no tempo *n* (e não antes), dado que ele estava no estado *i*, no tempo 0.

Se $j = i$, $f_{ij}^{(n)}$ é a **probabilidade de 1ª retorno**, isto é a probabilidade de que sejam necessários *n* passos até atingir o estado *j* pela 1º vez dado que o processo começa no estado *i.*

$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}$, e para $f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{n}$, $n > 1$.

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{k} p_{jj}^{(n-k)} \qquad (8)$$

$F^{(n)} = [f_{ij}^{(n)}]$, para cada i,j, é a matriz de primeira passagem / primeiro retorno.

1.2.3. CLASSIFICAÇÃO DE ESTADO

Processos Irredutíveis: cada estado pode ser alcançado de qualquer outro (através de uma seqüência de transições), caso contrário o processo é dito redutível. A Figura 1.3 mostra um exemplo de processo redutível.

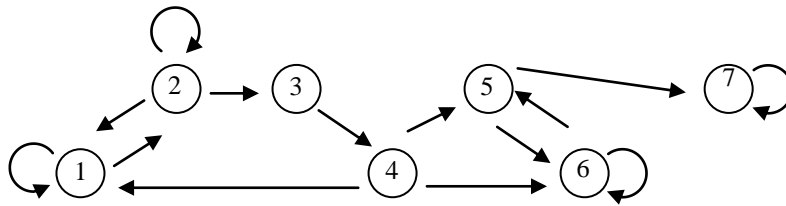



Figura 1.3 – Exemplo de Processo Redutível

Estado Recorrente: se já aconteceu uma vez é certo que irá ocorrer novamente, ou seja, existe uma probabilidade não nula do estado vir a acontecer no futuro.

$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \neq 0$, para cada i.

Estado Transiente: irá ocorrer um determinado número de vezes e posteriormente não ocorrerá mais.

$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, para cada i, j é estado transiente.

Vale ressaltar que um processo *finito e irredutível* tem todos os estados recorrentes.

Estado Nulo: estado recorrente, porém com o tempo de recorrência infinito.

Estado não-nulo: tempo de recorrência finito.

Estado Periódico: estados só podem ocorrer em tempo fixo.

Considere a Figura 1.4, neste caso, os estados 1 e 2 só podem ser alcançados num tempo fixo igual a 2.

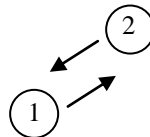



Figura 1.4 – Exemplo de Estado Periódico

A definição de estado periódico não garante que o estado ocorra, mas se ele acontecer, terá que ser naquele tempo.

Estado Absorvente: $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$, para cada i, j é estado absorvente

Cadeia Absorvente: possui pelo menos um estado absorvente, como mostra a Figura 1.5, onde os estados 4 e 5 são absorventes.

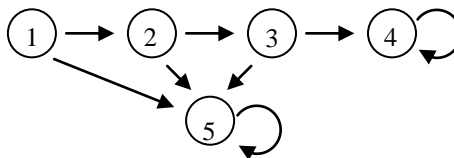



Figura 1.5 – Exemplo de Cadeia Absorvente

1.2.4. CADEIAS DE MARKOV ERGÓDICAS (PROBABILIDADES LIMITE)

Uma cadeia é dita **Ergódica** se for irredutível, recorrente, não-nula e aperiódica.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \Pi_j \qquad (9),$$

onde:

$\prod_j$ é fração do tempo que o processo passa no estado j.

À medida que o tempo do processo cresce, o estado inicial perde importância, assim como o próprio tempo.

$\prod = [\prod_j]$ (vetor linha)

$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$ (m réplicas do vetor $\prod = [\prod_j]$)

Da equação de Chapman-Kolmogorov temos:

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}P$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} P^{n-1}P = \{\lim_{n\to\infty} P^{n-1}\}P$$

$$\Pi = \Pi\, P$$

A equação acima representa um sistema de equações lineares com *m* sistemas independentes e iguais com *m* equações lineares cada um. Isto é, *m* réplicas do sistema abaixo:

$$\begin{cases} \Pi = \Pi P \\ \sum_{\forall j} \Pi_j = 1 \end{cases}$$

Uma outra abordagem para o problema a ser considerada é pela utilização da **Lei de Conservação do Fluxo**, a qual garante que no estado permanente, o fluxo que sai do sistema é igual ao fluxo que entra.

FLUXO QUE SAI = FLUXO QUE ENTRA

Para análise através da Lei de Conservação de Fluxo, consideremos a Figura 1.6, abaixo:

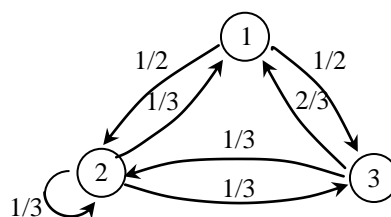



Figura 1.6 – Exemplo (Lei de Conservação de Fluxo)

A matriz P de probabilidades de transição de estados para este exemplo encontra-se descrita a seguir.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Conservação do fluxo

$$\begin{cases} nó\ \ 1: \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_1 = \frac{1}{3}\Pi_2 + \frac{2}{3}\Pi_3 \\ nó\ \ 2: \frac{1}{3}\Pi_2 + \frac{1}{3}\Pi_2 + \frac{1}{3}\Pi_2 = \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{3}\Pi_2 + \frac{1}{3}\Pi_3 \\ nó\ \ 3: \frac{1}{3}\Pi_3 + \frac{2}{3}\Pi_3 = \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{3}\Pi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_1 = 1/3\Pi_2 + 2/3\Pi_3 \\ \Pi_2 = 1/2\Pi_1 + 1/3\Pi_2 + 1/3\Pi_3 \end{cases}$$

combinação linear

$$\Pi_3 = 1/2\Pi_1 + 1/3\Pi_2$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1$$

Resulta em
Π_1= 0,323
Π_2= 0,387
Π_3= 0,290

1.2.5. TEMPO MÉDIO DE 1º PASSAGEM / RECORRÊNCIA

Seja N_{ij} variável aleatória que representa o número de estágios necessários para atingir *j* pela 1º vez, partindo de *i*:

$P\{N_{ij} = n\} = f_{ij}^{(n)}$ (distribuição do tempo de 1º passagem/1º retorno)

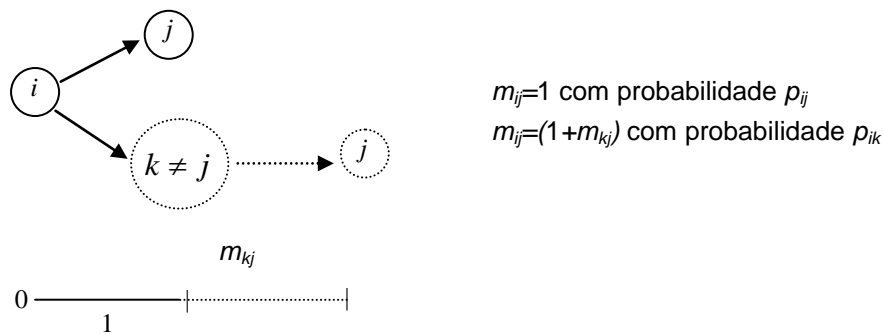
$$m_{ij} = E(N_{ij}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

- **1º retorno (*i* = *j*)**

$\prod_j$ é fração do tempo que o processo passa no estado j.

$m_{jj} = 1/\prod_j$ é o período médio entre a ocorrência de j.

- **Tempo médio de 1º passagem (*i* ≅ *j*)**

Condicionado ao estado no estágio 1

$$m_{ij} = p_{ij} * 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}(1 + m_{kj})$$

$$m_{ij} = p_{ij} * 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} * 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj}$$

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj} \quad (10)$$

Exemplo: Serviço de Transporte de Passageiros por um Helicóptero

Consideremos uma cidade com apenas três helipontos (Barra Shopping (1), Santos Dumont (2) e Galeão (3)) e um único helicóptero, que recolhe o passageiro de um dos helipontos e os leva até um outro dos helipontos, onde aguardam até que apareça outro passageiro. Um único passageiro (um grupo com o mesmo destino) é atendido de cada vez.

Se o helicóptero está brevemente no Galeão, qual é a probabilidade de que ele volte após 3 viagens ?

Se o helicóptero está brevemente no Santos Dumont, quantas viagens, em média, irão correr até que ele volte ao Santos Dumont?

Em um longo período de tempo, qual a fração de viagem se destinam ao Barra Shopping?

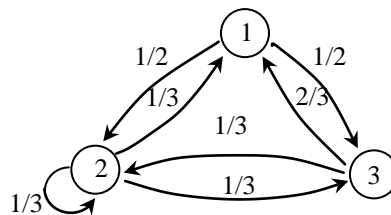



Figura 1.7 – Exemplo (Serviço de Transporte de Passageiros por um Helicóptero)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$ é a matriz de transição de estados.

O grafo mostrado na Figura 1.7 é um recurso muito usado no estudo dos processos estocásticos, denominado **diagrama de transição de estados.**

Solução:

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{12} & \frac{13}{36} \\ \frac{17}{54} & \frac{7}{18} & \frac{8}{27} \\ \frac{4}{9} & \frac{19}{54} & \frac{11}{54} \end{bmatrix}$$

Assim a probabilidade de que o helicóptero volte após 3 viagens é $\frac{11}{54}$.

Da equação (9) temos: $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^n = \prod_j$

Utilizando, por exemplo, a calculadora HP podemos obter:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0{,}322 & 0{,}387 & 0{,}29 \\ 0{,}322 & 0{,}387 & 0{,}29 \\ 0{,}322 & 0{,}387 & 0{,}29 \end{bmatrix}$$

Assim, em um longo período de tempo, a fração de viagens que se destinam ao Barra Shopping é de 0,322.

Temos que $m_{jj} = \dfrac{1}{\Pi_j}$; Assim $m_{22} = \dfrac{1}{\Pi_2} = \dfrac{1}{0{,}387} = 2{,}583$, que representa o número médio de viagens que irão ocorrer até que o helicóptero volte ao Santos Dumont.

1.2.6. CADEIAS DE MARKOV ABSORVENTES

a) Representação Matricial:

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

b) Probabilidade de Absorção (A)

$A = [a_{ij}]$, para cada i pertencente aos estados transientes e para cada j pertencente aos estados absorventes.

$a_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, para cada i pertencente aos estados transientes e para cada j pertencente aos estados absorventes.

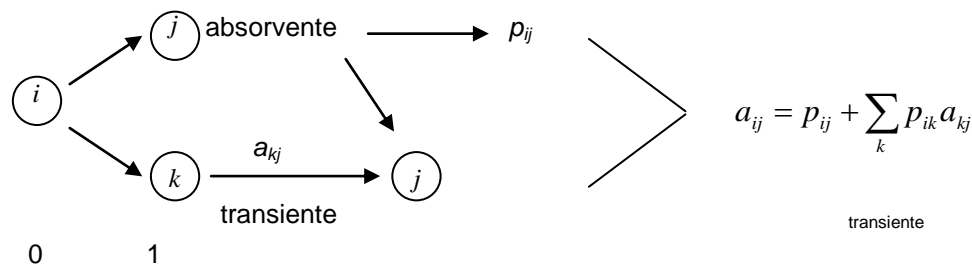
A probabilidade de absorção sempre depende do estado inicial:

i → j absorvente → p_{ij}

i → k → (a_{kj}) → j

transiente

0 1

$$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k} p_{ik} a_{kj}$$

transiente

$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in T} p_{ik} a_{kj}$, para cada i pertencente aos estados transientes e para cada j pertencente aos estados absorventes.

$$A - Q * A = R$$
$$(I - Q) * A = R$$
$$A = (I - Q)^{-1} * R \quad \textbf{(11)}$$

c) Duração média do regime transiente

Diz-se que e_{iz} é o número médio de vezes que o estado transiente z é ocupado, dado que o estado inicial é i, i pertencente aos estados transientes.

Se $i \neq z$, então $e_{iz} = \sum_{k \in T} p_{ik} e_{kz}$

Se $i = z$, então $e_{iz} = 1 + \sum_{k \in T} p_{ik} e_{kz}$

$E = [e_{iz}]$, i, z pertencente aos estados transientes.

$E = (I - Q)^{-1}$ **(12)**

d_i é a duração média do regime transiente, dado que o estado inicial é i.

$d_i = \sum_{j \in T} e_{ij}$ **(13)**

Duração média do processo se ele está no estado i e termina no estado j (r_{ij}):

$a_{ij} \cdot r_{ij} = a_{ij} + \sum_{k\ transiente} p_{ik} \cdot a_{kj} \cdot r_{kj}$, para i transiente e j absorvente.

(OBS: fazendo $b_{ij} = a_{ij} \cdot r_{ij}$ e $B = \{b_{ij}\}_{k \times l}$, teremos $B = (I - Q)^{-1} \times A$.)

Exemplo:

Uma floresta é constituída de dois tipos de árvores: aquelas com até 3 metros e as maiores do que 3 metros. A cada ano 40% das árvores com até 3m morrem, 10% são vendidas por $20 cada, 30% permanecem com até 3 metros e 20% crescem para acima de 3m. Das árvores maiores do que 3m a cada ano são vendidas 50% por $50 cada, 20% por $30 cada e 30% permanecem na floresta.

a) Qual a probabilidade de que uma árvore, com menos de 3m, morra antes de ser vendida?

b) Se uma árvore (com menos de 3m) é plantada, qual é o seu valor esperado de venda?

M, V20, V30 e V50 são estados absorventes.

$$P = \begin{array}{c} \\ -3 \\ +3 \\ M \\ V20 \\ V30 \\ V50 \end{array} \begin{array}{cccccc} -3 & +3 & M & V20 & V30 & V50 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$E = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,428 & 0,408 \\ 0 & 1,428 \end{bmatrix}, \qquad A = E.R = \begin{bmatrix} 0,571 & 0,142 & 0,082 & 0,204 \\ 0 & 0 & 0,285 & 0,714 \end{bmatrix}$$

a) Probabilidade de que uma árvore, com menos de 3m, morra antes de ser vendida:
$a_{-3,M} = 0,571 \cong 57\%$

b) Valor esperado de venda, se uma árvore com menos de 3m é plantada:
$V_{esp} = 20*0,142 + 30*0,082 + 50*0,204 = \$15,50$

1.3. CADEIA DE MARKOV EM TEMPO CONTÍNUO

Uma cadeia de Markov em tempo continuo e, como a designação indica uma cadeia de Markov em que a variável tempo é continua, representando instantes ou momentos de

tempo (e não períodos de tempo, como para as cadeias em tempo discreto). Assim, uma cadeia de Markov em tempo continuo é um processo estocástico {X(t), t ≥ 0} com a propriedade de Markov, ou seja, a propriedade de estar no estado j num momento futuro depende apenas do estado presente e não dos estados visitados em qualquer momento passado.

Considerando a Gráfico 1.1 abaixo, temos:

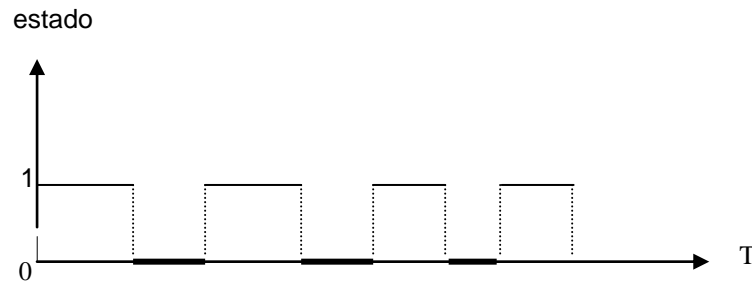



Gráfico 1.1 - Processo de Markov em Tempo Continuo

$p_{ij}^{(t_o,t)} = p_{ij}^{(0,t)} = p_{ij}^{(t)}$ (processo homogêneo): probabilidade que o sistema esteja no estado *j,* no instante *t,* dado que ele estava no estado *i* no instante 0.

$P(t) = [p_{ij}^{(t)}]$

No exemplo temos:

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{bmatrix}$$

Suposições:

- O processo satisfaz a propriedade de Markov;
- O processo é estacionário;
- A probabilidade de 2 ou mais mudanças de estado acontecerem num certo intervalo de tempo $\Delta(t)$ pequeno é zero;
- A probabilidade de uma transição de 0 para 1; ou de 1 para 0 em um certo intervalo de tempo $\Delta(t)$ pequeno é proporcional a $\Delta(t)$:

$$p_{01}(\Delta t) = \alpha(\Delta t) \quad \textbf{(14)}$$

e $p_{10}(\Delta t) = \beta(\Delta t)$ **(15)**

Assim temos que:

$$p_{00}(t+\Delta t) = p_{00}(t)\,p_{00}(\Delta t) + p_{01}(t)\,p_{10}(\Delta t)$$
$$p_{00}(t+\Delta t) = p_{00}(t)[1-p_{01}(\Delta t)] + [1-p_{00}(t)]\,p_{10}(\Delta t)$$
$$p_{00}(t+\Delta t) = p_{00}(t)[1-\alpha(\Delta t)] + [1-p_{00}(t)]\beta(\Delta t)$$
$$\frac{p_{00}(t+\Delta t)-p_{00}(t)}{\Delta t} = \beta-(\alpha+\beta)\,p_{00}(t)$$
$$\frac{p_{00}(t+\Delta t)-p_{00}(t)}{\Delta t} = \beta-(\alpha+\beta)\,p_{00}(t)$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{00}(t+\Delta t)-p_{00}(t)}{\Delta t} = \beta-(\alpha+\beta)\,p_{00}(t)$$
$$\frac{dp_{00}(t)}{dt} = \beta-(\alpha+\beta)\,p_{00}(t)$$
$$\frac{dp_{00}(t)}{\beta-(\alpha+\beta)\,p_{00}(t)} = dt$$

Integrando ambos os lados, temos:

$$\frac{\ln[\beta-(\alpha+\beta)\,p_{00}(t)]}{-(\alpha+\beta)} = t$$
$$\beta-(\alpha+\beta)\,p_{00}(t) = ce^{-(\alpha+\beta)t}$$

Como $p_{00}(0)=1$, temos $\beta-(\alpha+\beta)=ce^{0}=-\alpha$.

Logo:

$$p_{00}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \qquad \textbf{(16)}$$

Analogamente, podemos obter:

$$p_{01}(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \qquad \textbf{(17)}$$
$$p_{11}(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \qquad \textbf{(18)}$$
$$p_{10}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \qquad \textbf{(19)}$$

1.3.1. VISUALIZAÇÃO MATRICIAL

$$\frac{dp_{00}(t)}{dt} = -\alpha p_{00}(t) + \beta p_{01}(t)$$

$$\frac{dp_{01}(t)}{dt} = \alpha p_{00}(t) - \beta p_{01}(t)$$

$$\frac{dp_{10}(t)}{dt} = -\alpha p_{10}(t) + \beta p_{11}(t)$$

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt} = \alpha p_{10}(t) - \beta p_{11}(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}; \text{ Seja } \Lambda = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$$

Assim temos:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\Lambda \qquad \textbf{(20)}$$

1.3.2. TEMPO ATÉ A PRÓXIMA TRANSIÇÃO

$$p_{00}(t+\Delta t) = p_{00}(t)\, p_{00}(\Delta t)$$

$$p_{00}(t+\Delta t) = p_{00}(t)[1 - p_{01}(\Delta t)]$$

$$p_{00}(t+\Delta t) = p_{00}(t) - p_{00}(t)\alpha\Delta t$$

$$p_{00}(t+\Delta t) - p_{00}(t) = -p_{00}(t)\alpha\Delta t$$

$$\frac{p_{00}(t+\Delta t) - p_{00}(t)}{\Delta t} = -\alpha p_{00}(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{00}(t+\Delta t) - p_{00}(t)}{\Delta t} = -\alpha p_{00}(t)$$

$$\frac{dp_{00}(t)}{dt} = -\alpha p_{00}(t)$$

$$p_{00}(t) = e^{-\alpha t} \qquad \textbf{(21)}$$

Generalizando

Um processo estocástico contínuo é um **processo de Markov** se: $\{X(t), t \geq 0\}$, com espaço de estados enumerável E, é um processo de Markov se para todo t, $s \geq 0$ e $j \in E$:

$$P[X(s+t) = j \mid X(u), u \leq s] = P[X(s+t) = j \mid X(s)] \quad \textbf{(22)}$$

O processo será **homogêneo** se:

$$P[X(s+t)=j \mid X(s)=i]=p_{ij}(t) \qquad \forall s \qquad \textbf{(23)}$$

Discretizando e utilizando a equação de Chapman-Kolmogorov temos:

$$p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{k\in E} p_{ik}(t)\,p_{kj}(\Delta t)$$

$$P(t+\Delta t)=P(t)P(\Delta t)$$

- Cálculo de $P(\Delta t)$

Utilizaremos para tal a expansão em série de Taylor:

$$p_{ij}(\Delta t)=p_{ij}(0)+p_{ij}`(0)(\Delta t)+\frac{1}{2}p_{ij}``(0)(\Delta t)^2+\frac{1}{6}p_{ij}```(0)(\Delta t)^3+...$$

$$p_{ij}(\Delta t)=p_{ij}(0)+p_{ij}`(0)(\Delta t)+\xi^2,$$

onde: $\xi^2 \to 0$.

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$$

$$p_{ij}`(0)=\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\lambda_{ij}$$

$$\Lambda=\left[\lambda_{ij}\right]$$

$$P(\Delta t)=I+\Lambda(\Delta t) \qquad \textbf{(24)}$$

Retomando, tínhamos anteriormente:

$$P(t+\Delta t)=P(t)P(\Delta t) \quad \text{Eq. C-K}$$

Substituindo o resultado obtido em (24) temos:

$$P(t+\Delta t)=P(t)[I+\Lambda(\Delta t)]$$

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{(\Delta t)}=P(t)\Lambda$$

$$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)\Lambda \qquad \textbf{(25)}$$

Λ é chamado **gerador infinitesimal**.

- Propriedades de Λ:

λ_{ij} é a taxa de transição ou taxa de saída, isto é a velocidade com que se escapa de um estado i para um estado j.

$$\sum_j \lambda_{ij} = 0$$

1.3.3. PROBABILIDADE DE REGIME PERMANENTE $(t \to \infty)$

No estudo das cadeias de Markov em tempo continuo interessa conhecer as probabilidades estacionarias $(t \to \infty)$ de o processo estar em diferentes estados.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dP(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty} P(t)\Lambda$$

$$\frac{d}{dt}\lim_{t\to\infty} P(t) = \left[\lim_{t\to\infty} P(t)\right]\Lambda$$

$$\frac{d}{dt}\Pi = \Pi\Lambda$$

As equações de regime permanente são as que seguem:

$$\begin{cases} 0 = \Pi\Lambda \\ 1 = \Pi e \end{cases} \qquad \textbf{(26)}$$

1.3.4. PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE

Os Processos de Nascimento-Morte são processos estocásticos muito utilizados na descrição de Sistemas de Filas de Espera, dada a sua particular estrutura: as transições de um qualquer estado só são possíveis para estados "vizinhos" (i.e., de um estado i para os estados i+1 ou i-1).

Adotando-se um espaço de estados X ={0, 1, …} e considerando que cada estado representa um certo "nível de população" (exemplo: número de clientes numa loja, número de mensagens num coletor de chamadas, número de produtos a processar, etc.), tais transições podem ser facilmente interpretadas.

A transição do estado i para o estado i+1 será um "nascimento" (por exemplo, chegada de um cliente), uma vez que significa um aumento do "nível da população". Enquanto que a transição do estado i para o estado i-1 será uma "morte" (por exemplo, partida de um cliente), por significar um decréscimo do "nível da população".

Considere a Figura 1.8 abaixo.

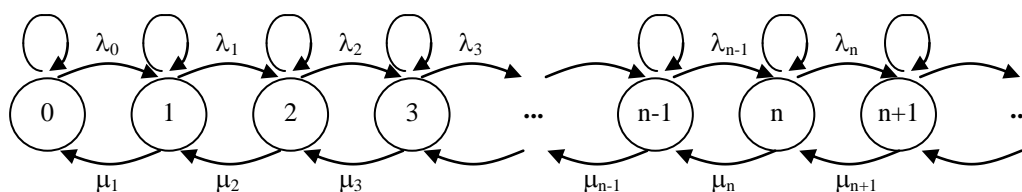



Figura 1.8 – Processo de Nascimento e Morte

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Sendo assim:

$$\lambda_{00} = -\lambda_{01}$$

$$\lambda_{11} = -(\lambda_{10} + \lambda_{12})$$

...

$$\lambda_{nn} = -(\lambda_{n,n-1} + \lambda_{n,n+1})$$

...

Por questão de simplicidade de notação usaremos:

$\lambda_{01} = \lambda_0$, $\lambda_{12} = \lambda_1$, $\lambda_{23} = \lambda_2$ ... e

$\lambda_{10} = u_1$, $\lambda_{21} = u_2$, $\lambda_{32} = u_3$, ...

Uma outra abordagem para o problema é usando a **Lei de Conservação do Fluxo**:

FLUXO QUE SAI = FLUXO QUE ENTRA

$$\begin{cases} 0 = \Pi\Lambda \\ 1 = \Pi e \end{cases}$$

0: $\lambda_0 \prod_0 = u_1 \prod_1$

1: $\prod_0 \lambda_{01} + \prod_1 \lambda_{11} + \prod_2 \lambda_{21} = 0$

$$\prod_0 \lambda_0 + \prod_1 [-(\lambda_1 + u_1)] + \prod_2 u_2 = 0$$

$$\prod_1[(\lambda_1 + u_1)] = \prod_0 \lambda_0 + \prod_2 u_2$$

2: $$\prod_1(\lambda_1 + u_1) - \prod_2(\lambda_2 + u_2) + \prod_3 u_3 = 0$$

$$(\lambda_2 + u_2)\prod_2 = \lambda_1 \prod_1 + \prod_3 u_3$$

Resolvendo o sistema temos:

0: $$\prod_1 = \frac{\lambda_0}{u_1}\prod_0$$

1: $$\prod_2 = \frac{\lambda_1}{u_2}\prod_1 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{u_2u_1}\prod_0$$

2: $$\prod_3 = \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{u_3u_2u_1}\prod_0$$

$$\prod_0\left(1 + \frac{\lambda_0}{u_1} + \frac{\lambda_1\lambda_0}{u_2u_1} + \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{u_3u_2u_1} + \dots\right) = 1$$

Para resolvermos o sistema é necessário que a série a convergência da série.

1.3.5. PROCESSO DE POISSON

Considere a Figura 1.9:

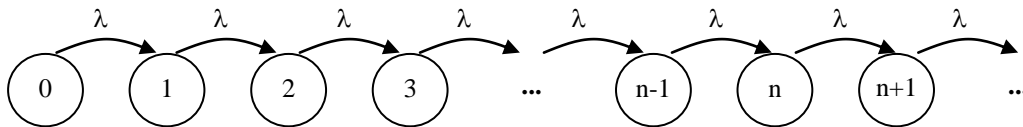



Figura 1.9 – O processo de Poisson

Equação de Chapman-Kolmogorov (equivalente no caso contínuo):

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\Lambda$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \dots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Da linha ϕ temos:

$$\frac{dp_{00}(t)}{dt} = -\lambda p_{00}(t)$$

$$\frac{dp_{01}(t)}{dt} = \lambda p_{00}(t) - \lambda p_{01}(t)$$

$$\frac{dp_{02}(t)}{dt} = \lambda p_{01}(t) - \lambda p_{02}(t)$$

$$\frac{dp_{0n}(t)}{dt} = \lambda p_{0,n-1}(t) - \lambda p_{0n}(t)$$

Resolvendo o sistema para a linha ϕ temos:

$$\frac{dp_{00}(t)}{p_{00}(t)} = -\lambda dt$$

$$\ln p_{00}(t) = -\lambda t + c$$

$p_{00}(t) = ce^{-\lambda t}$; como $p_{00}(0) = 1$, segue que $c = 1$.

$$p_{00}(t) = e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(27)}$$

Assim o tempo de permanência no estado tem distribuição exponencial.

$$\frac{dp_{0n}(t)}{dt} + \lambda p_{0n}(t) = \lambda p_{0,n-1}(t)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $e^{-\lambda t}$ temos:

$$e^{\lambda t}\left[\frac{dp_{0n}(t)}{dt} + \lambda p_{0n}(t)\right] = e^{\lambda t}\lambda p_{0,n-1}(t)$$

$$\frac{de^{\lambda t}\, p_{0n}(t)}{dt} = e^{\lambda t}\lambda p_{0,n-1}(t)$$

Para n = 1 temos:

$$\frac{de^{\lambda t}\, p_{01}(t)}{dt} = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t}$$

$$\frac{de^{\lambda t}\, p_{01}(t)}{dt} = \lambda$$

$$e^{\lambda t} p_{01}(t) = \lambda t + d$$

$p_{01}(t) = (\lambda t + d)e^{\lambda t}$, como $p_{01}(0) = 0$ temos:

$$p_{01}(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

…

$$p_{0n}(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(28)}$$

O número de eventos tem distribuição de Poisson, com parâmetro λt, que é o número esperado de eventos ocorrendo no período t.

1.3.6. TEMPO ENTRE EVENTOS CONSECUTIVOS

Seja T_n a variável aleatória correspondente ao tempo entre o (n-1)-ésimo e o n-ésimo evento.

Assim T_1 é o tempo até que o primeiro evento ocorra.

$$p_{00}(t) = P[nenhumeventoocorranotempot]$$
$$p_{00}(t) = P[T_1 > t]$$
$$P[T_1 > t] = e^{-\lambda t}$$
$$P[T_1 \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

Generalizando, temos que:

$$P\{(T_{n+1} - T_n) \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(29)}$$

Portanto, o tempo entre eventos consecutivos em um processo de Poisson tem distribuição exponencial.

1.3.7. SUPERPOSIÇÃO DE PROCESSOS DE POISSON

Se A é um processo de Poisson com taxa λ_A e B é um processo de Poisson com taxa λ_B então C também é um processo de Poisson com taxa $\lambda_c = \lambda_A + \lambda_B$.

1.3.8. DECOMPOSIÇÃO DE PROCESSOS DE POISSON

Se A é um processo de Poisson então B e C serão processos de Poisson se a separação for probabilística e independente.

1.3.9. TEOREMA DE KHINTHINE

A superposição de um grande número de processos de renovação (tempos entre eventos independentes e identicamente distribuídas – i.i.d) é aproximadamente um processo de Poisson.

1.4. EXERCICIOS PROPOSTOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

01) Uma floresta é constituída de dois tipos de árvores: aquelas com até 3 metros e as maiores do que 3 metros. A cada ano 40% das árvores com até 3m morrem, 10% são vendidas por $20 cada, 30% permanecem com até 3 metros e 20% crescem para acima de 3m. Das árvores maiores do que 3m a cada ano são vendidas 50% por $50 cada, 20% por $30 cada e 30% permanecem na floresta.
a) Qual a probabilidade de que uma árvore, com menos de 3m, morra antes de ser vendida?
b) Se uma árvore (com menos de 3m) é plantada, qual é o seu valor esperado de venda?

02) Com a chegada da civilização, os índios da Aldeia Taipan resolveram instituir um sistema de previdência social, para o que contaram com a ajuda de um consultor, Mestre em Engenharia de Produção. A primeira etapa do estudo do consultor consistiu em classificar os índios em três grupos: crianças, trabalhadores e aposentados. Logo em seguida, utilizando a excelente memória dos índios, ele inferiu os seguintes dados: durante um período de um ano, 959/1000 de todas as crianças permanecem crianças, 40/1000 se tornam adultos trabalhadores e 1/1000 delas morrem; além disto, ainda durante um dado ano, 960/1000 de todos os adultos trabalhadores permanecem adultos trabalhadores, 30/1000 se aposentam e 10/1000 falecem. A taxa de mortalidade dos aposentados é de 50/1000 a cada ano. O número de nascimentos é de 1000 crianças por ano.
a) Supondo que a população da Aldeia está em regime permanente determine a sua população, bem como sua estrutura etária (nos três grupos mencionados).
b) Cada aposentado recebe uma pensão de $ 5.000 por ano. O fundo de pensão é custeado pelos pagamentos dos adultos trabalhadores. Com quanto cada adulto trabalhador deve contribuir, por ano, para o fundo de pensão?

03) No jogo de Craps, nós jogamos um par de dados de seis faces. No primeiro lançamento, se tirarmos 7 ou 11 nós ganhamos imediatamente. Se tirarmos 2, 3 ou 12 perdemos imediatamente. Se o resultado do primeiro lançamento for 4, 5, 6, 8, 9, 10 nós continuamos a lançar os dados até obtermos um 7, quando perdemos, ou até obtermos o mesmo resultado que o primeiro lançamento, quando ganhamos. Use os seus conhecimentos de Cadeias de Markov para determinar nossa probabilidade de vitória.

04) A Gazeta da Produção tem as seguintes informações a respeito de seus assinantes: Durante o primeiro ano 20% dos assinantes cancelam suas assinaturas. Daqueles que completaram o 1o ano, 10% cancelam sua assinatura no 2o ano. Daqueles que assinam por mais de 2 anos 4% irão cancelá-los durante algum dos próximos anos. Em média qual a duração de uma assinatura da Gazeta da Produção?

05) O tempo em Pedra Azul pode ser descrito, como dependente do tempo nos dois últimos dias, pelo seguinte mecanismo: (i) se os últimos dois dias foram ensolarados então existe 95% de chance de amanhã também ser ensolarado; (ii) se ontem esteve chuvoso e hoje ensolarado então com 70% de chance amanhã será ensolarado; (iii) se ontem estava ensolarado e hoje está chuvoso então amanhã será um dia chuvoso com 60% de chance; (iv) se os dois últimos dias foram chuvosos então amanha será um dia chuvoso com 80% de chance.
É possível modelar o tempo em Pedra Azul como uma cadeia de Markov? Explique porque e construa o diagrama de transição de estados.

06) Suponha que no mercado existem apenas duas marcas de cerveja Mharba e Ártica. Dado que a última compra de uma pessoa foi uma de Mharba, existe 90% de chance de que sua próxima compra seja de Mharba. Dado que a última compra de uma pessoa foi de Ártica existe uma probabilidade de 80% de que sua próxima compra seja de Ártica.
a) Represente o problema por uma cadeia de Markov, apresentando a matriz de probabilidades de transição e o diagrama de transição de estados.
b) Dado que uma pessoa acabou de comprar Mharba quanto tempo será necessário para que outra compra de Mharba seja realizada? E de Ática? Como você interpreta o tempo neste caso?
c) Suponha ainda que cada consumidor faça uma compra de cerveja por semana (1 ano = 52 semanas), e que existam 100 milhões de consumidores de cerveja. Uma unidade de cerveja é vendida por $2 e custa à cervejaria $1. Por $500 milhões por ano uma firma de propaganda garante diminuir de 10% para 5% a fração dos clientes de Mharba que mudam para Ártica depois de uma compra. Deve a cervejaria Mharba contratar a empresa de propaganda?

07) Uma companhia com um vôo às 7h45 da manhã entre Rio e Brasília não quer que o vôo se atrase dois dias seguidos na mesma escala. Se o vôo sai atrasado um dia, a companhia faz um esforço especial no dia seguinte para que o vôo saia no horário, e obtém sucesso em 90% das vezes. Se o vôo não saiu atrasado no dia anterior, a companhia não toma providências e o vôo sai como escalado em 60% das vezes. Que percentual de vezes o vôo sai atrasado? Qual o tempo médio entre dois vôos no horário?

08) A Ábaco sistemas de computação registra a cada semana uma demanda equiprovável de 1 ou 2 de seu modelo A500. Todos os pedidos devem ser atendidos do estoque existente. Duas políticas de estoque estão sendo consideradas:
Política I: Se o estoque é de 2 ou menos unidades, coloca-se um pedido de forma que o estoque inicial na próxima semana seja de 4 unidades.
Política II: Se o estoque é de 1 ou menos unidades, coloca-se um pedido de forma que o estoque inicial na próxima semana seja de 3 unidades.
Os seguintes custos são observados na Ábaco:
• Custo de comprar um computador: $4.000
• Custo de manter o computador em estoque $100/semana.computador,

• Custo de efetuar um pedido $500 (além do custo de $4.000 por computador).
Qual política tem o menor custo semanal esperado?

09) O programa de treinamento de supervisores de produção de uma determinada companhia consiste de duas fases. A fase 1 a qual envolve 3 semanas de aula teórica, é seguida da fase 2 a qual envolve 3 semanas de aprendizagem prática. Pelas experiências anteriores, a companhia espera que somente 60% dos candidatos da fase teórica passem para a fase prática, com os 40% restantes sendo desligados do programa de treinamento. Dos que fazem a parte prática, 70% são graduados como supervisores, 10% enviados para repeti-la e 20% dispensados.
a) Desenhe o diagrama de transição de estados.
b) Quantos supervisores pode a companhia esperar formar de seu programa normal de treinamento, se existem 45 pessoas na fase teórica e 21 na fase prática?

10) No instante 0, eu tenho $1. Nos instantes 1, 2, 3, ... eu jogo um jogo no qual eu aposto $1. A cada lance tenho uma probabilidade p de ganhar $1 e probabilidade q= 1 - p de perder $1 Meu objetivo é aumentar meu capital para $4, e tão logo eu o consiga eu saio do jogo, assim como se eu ficar sem nenhum dinheiro.
a) Construa a matriz de probabilidades de transição e o diagrama de transição de estados para a cadeia de Markov que modela o jogo.
b) Após 2 jogadas qual a probabilidade que eu tenha $2 ? E $3?
c) Porque não é razoável para este jogo falar em probabilidades de regime permanente?

11) O livro de didático "PO - A Solução" vende 1 milhão de exemplares a cada ano. Alguns dos leitores conservam o livro enquanto outros vendem o livro de volta para a livraria. Suponha que 90% de todos os estudantes que compram um novo livro o vendam de volta, que 80% dos estudantes que compram o livro com um ano de uso o vendam de volta e que 60% dos estudantes que compram um livro com dois anos de uso o vendam de volta. Os livros com 4 ou mais anos de uso já estão muito usados e não são mais negociados.
a) Em regime permanente, quantos novos exemplares do livro pode a editora esperar vender do livro?
b) Suponha que o lucro da livraria com cada tipo de livro seja de $6 por um livro novo, $3 por um livro com 1 ano de uso, $2 por um livro com 2 anos de uso e de $1 por livro com 3 anos de uso. Qual o lucro esperado por livro vendido?

12) Três bolas são divididas entre 2 caixas. Durante cada período uma bola é escolhida aleatoriamente e trocada para a outra caixa.
a) Calcule a fração do tempo que uma caixa irá conter 0, 1, 2 ou 3 bolas.
b) Se a caixa 1 não contém bolas, em média quanto tempo será decorrido até que ela contenha 1, 2 e três bolas ?

13) Classifique os diversos estados das cadeias de Markov a seguir, dadas por sua matriz de transição. Calcule as probabilidades estacionárias.

a) $P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$

f) $P = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 7/8 \end{bmatrix}$

14) Dois jogadores jogam uma moeda honesta. Se der cara o jogador I paga R$1 ao jogador II, se der coroa é o jogador II que paga R$1 ao jogador I. Considere que a quantidade total de dinheiro em jogo (isto é a soma das quantias possuídas pelos dois jogadores) é de R$5. Modele o jogo como uma cadeia de Markov. Dado que o jogador I começou o jogo com R$3, calcule o tempo esperado do jogo e a probabilidade de que cada um dos jogadores vença o jogo (isto é alcance R$5).

15) Quatro meninos (A, B, C e D) brincam de lançar disco. Se o menino A recebe o disco lança-o para B, C ou D com iguais probabilidades; se C recebe o disco lança-o para A ou D com iguais probabilidades; se B ou D recebem o disco, ficam com o mesmo. Modele o problema como uma cadeia de Markov. Desenhe também o diagrama de transição de estados.

a) Se o disco está com C qual a probabilidade de D ficar com o disco?

b) Se A está com o disco qual a probabilidade do disco terminar com B?

16) Considere um jogador que a cada lance de um jogo tem uma probabilidade p de ganhar uma unidade e probabilidade q= 1 - p de perder uma unidade. Assumindo que sucessivos lances são independentes qual é a probabilidade que começando com i unidades a fortuna do jogador alcance n antes de chegar a 0?

17) Uma loja de máquinas fotográficas estoca um modelo de máquina fotográfica particular que pode ser encomendado semanalmente. Sejam D_1, D_2, ..., D_i,... variáveis aleatórias que representam a demanda pelas máquinas durante a semana i. Seja X_o o estoque existente de máquinas, e X_i o número de máquina disponíveis ao final da semana i. Sábado à noite a loja faz uma encomenda que será entregue em tempo para a abertura da loja na 2^a feira. A política de encomendas da loja é (s,S)=(1,3); ou seja, se no Sábado a noite a quantidade de máquinas em estoque for menor que s=1 (nenhuma máquina em estoque), então a loja encomendará (até) S=3 máquinas; caso contrário nenhuma máquina será encomendada. É suposto que haja perdas de vendas quando a demanda exceder o estoque disponível. As variáveis aleatórias podem ser avaliadas iterativamente pela expressão:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{(3 - D_{t+1}),0\}, \text{se} X_t < 1 \\ \max\{(X_t - D_{t+1}),0\}, \text{se} X_t \geq 1 \end{cases}$$

Considerando que a demanda tem uma distribuição de Poisson com média 1, a matriz de transição de uma etapa é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$$

a) Descreva como a matriz de transições pode ter sido obtida.
b) Se o processo iniciou com um estoque de 3 máquinas qual o tempo esperado para que o estoque se esgote ?
c) Qual a probabilidade de encontrar o estoque com 0, 1, 2, 3 e 4 máquinas ?
d) Qual o tempo médio entre duas encomendas?

18) Um naturalista está observando o comportamento de um sapo em um pequeno lago, no qual há 4 ninféias (plantas aquáticas). O sapo circula entre estas 4 plantas pulando de uma para outra, as quais são numeradas arbitrariamente de 1 a 4. A probabilidade do sapo pular de uma planta para outra é inversamente proporcional a distância entre elas (isto é, o sapo prefere pular para uma planta mais perto do que para uma mais longe). As distâncias entre as plantas são:

	2	3	4
1	6/5	2	3/2
2		6/7	1/2
3			3/4

a) Defina a matriz de transição
b) Calcule as probabilidades de regime permanente
c) Interprete estas probabilidades em termos do comportamento do sapo.
d) Explique, do ponto de vista do sapo, o que significam as hipóteses de Markov e de estacionariedade.

19) Se-segura Companhia de Seguras classifica seus clientes de acordo com seu histórico de acidentes (do cliente). Um cliente que não tenha tido nenhum acidente nos últimos dois anos tem uma anualidade de $100. Clientes que tenham tido acidentes em ambos os anos tem uma anualidade de $400. Clientes que tenham tido acidente em somente um dos últimos dois anos tem uma anualidade de $300. Um cliente que tenha tido um acidente no último ano tem 10% de chance de ter um acidente no ano corrente. Se o cliente não tiver tido nenhum acidente no último ano ele tem 3% de chance de ter um acidente no ano corrente. Para um dado ano, qual é a anualidade média paga por um cliente da Se-segura?

20) DOFOGO é uma companhia produtora de fogões, famosos pela sua qualidade. A companhia tem uma política de 2 anos de garantia, onde ela garante a substituição de qualquer fogão que falhe durante este período. A companhia está planejando fazer uma campanha promocional onde pretende estender a garantia para três anos. Como forma de avaliar o impacto desta nova política foram coletados os seguintes dados: 3% dos fogões novos falham durante o primeiro ano de operação; 5% dos fogões com mais de um ano de uso falham durante o segundo ano de operação; 7% dos fogões com mais de dois anos de uso falham durante o terceiro ano de operação. Observe que um fogão substituído não é coberto pela garantia.
a) Use cadeias de Markov para predizer quantos fogões deverão ser repostos com a nova política.
b) Supondo que o custo de repor um fogão seja de $100 e que a DOFOGO venda 10.000 fogões por ano, qual o impacto monetário da mudança de política de garantia?

21) O proprietário de uma barbearia de uma só cadeira está pensando em expandi-la devido ao fato de haver muita gente em espera. As observações indicam que durante o período de tempo requerido para cortar o cabelo de uma pessoa, podem haver 0, 1 2 e 3 novas chegadas com probabilidade 0,3; 0,4; 0,2; 0,1; respectivamente. A cada tem capacidade fixa de 6 pessoas, incluindo aquela que estiver cortando o cabelo.
a) Desenhe o diagrama de transição de estado e determine a matriz de probabilidade de transição.
b) Determine a probabilidade que a casa esteja lotada.
c) Dado que a casa esta lotada quanto tempo demora até que ela esteja completamente vazia?

22) Suponha que você conduziu uma série de testes sobre um procedimento de treinamento e verificou que a seguinte matriz de probabilidades descreve o conjunto de respostas "corretas e incorretas"

	(j+1)-ésimo teste		
j-ésimo teste		Correto	Incorreto
	Correto	0,95	0,05
	Incorreto	0,01	0,99

a) Que proporção de respostas corretas se pode esperar de um estagiário "absolutamente treinado"?
b) Que proporção de respostas corretas se pode esperar de um estagiário após quatro repetições do procedimento, caso a resposta inicial seja igualmente possível de ser correta ou incorreta?
c) Qual a probabilidade de que se obtenha, pela primeira vez, uma resposta correta, exatamente quatro tentativas após uma resposta incorreta?
d) Qual o número médio de tentativas para que se obtenha uma resposta correta após ter obtido uma resposta incorreta?

23) Um jogador joga um "jogo limpo" no qual as chances são 2 contra 1. Em outras palavras ele tem 1/3 de probabilidade de ganhar e 2/3 de perder. Se ganhar, ganhará $2. Se perder, perderá $1. Suponha que os recursos totais do jogador e do seu oponente sejam $N. Se o capital de qualquer um dos jogadores cair abaixo do ponto em que eles pudessem pagar caso perdessem o jogo seguinte o jogo termina.
a) Desenhe o diagrama de transição de estados e determine a matriz de transição.
b) Suponha que os dois jogadores concordem em que se o capital de qualquer dos dois cair para $1, eles farão o próximo jogo com chances iguais – ganharão ou perderão $1, com igual probabilidade. Desenhe o diagrama de transição de estados e determine a matriz de transição para este caso.
c) No caso descrito na letra (b) suponha que o jogador 1 tem $3 e o jogador 2 tem $2, qual a probabilidade do jogador 1 ganhar o jogo ?
d) Quantas jogadas durará o jogo?

24) Perfura-se um poço e, à medida que a perfuração avança, uma série de perfis são realizados. Suponha que o poço possa ser classificado em quatro estados, rotulados como se segue: Em curso; Com desvio ligeiro, Com desvio acentuado, Abandonado (por estar tão fora de curso, que não se consegue mais atingir o alvo). Suponha ainda que X_n represente o estado do sistema após a n-ésima correção de curso e que o comportamento do poço possa ser modelado por uma cadeia de Markov, com a seguinte matriz de probabilidade de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Se o poço começou com um desvio ligeiro, qual a probabilidade de que ele eventualmente entre em curso?
b) Se o poço tem chances iguais de começar com desvio ligeiro e acentuado, qual a probabilidade de que ele eventualmente entre em curso?

25) Na teoria de análise de crédito, determinados autores verificaram que a estimativa dos valores considerados como devedores duvidosos costuma seguir dois passos básicos descritos a seguir: Classificam-se as contas por idade, que refletem o estado em que a conta se encontra: um mês de atraso, dois meses de atraso, etc.
Estima-se uma expectativa de perda para cada estado, geralmente com base na política da empresa, situação econômico-financeira do cliente e outros fatores relevantes para a análise do crédito. O segundo tópico merece uma análise mais detalhada, sendo que atualmente diversos métodos, principalmente na área de econometria, estão sendo desenvolvidos. Entretanto, é possível desenvolver um método para estimar a probabilidade de devedores duvidosos, com base nas Cadeias de Markov, através do atraso e da inadimplência existente para uma determinada carteira de crédito de uma instituição financeira. Se em uma determinada data fizermos um levantamento de uma carteira de crédito, poderemos facilmente verificar os seguintes estados das contas em carteira:

A_0 = valores a serem recebidos que ainda não venceram, ou seja, estão em dia ou com 0 (zero) meses de atraso;
A_1 = valores a serem recebidos que estão com 1 mês de atraso;
....
A_j = valores a serem recebidos que estão com j meses de atraso;
....
A_n = valores a serem recebidos que estão com n meses de atraso;

Essa disposição corresponde a uma classificação da idade das contas a receber, sendo o estado A_0 a conta que está em dia, A_1 a conta com um mês de atraso, e assim por diante. A_n é a situação dos considerados incobráveis. Na prática o número de idades das contas pode variar de instituição para instituição ou por categorias de crédito, tais como crédito imobiliário, leasing, financiamentos diretos ao consumidor e qualquer outro tipo de operação de crédito. Se considerarmos um levantamento de contas a receber provenientes do período i para o período seguinte i + 1, que denominaremos de j , a conta poderá ser classificada com relação a esses dois índices, o período anterior e o período em que se encontra no momento atual. De forma geral, teremos A_{jk} igual ao levantamento da categoria k no tempo i + 1, o qual é proveniente da categoria j no tempo i. Para considerarmos todas as possíveis categorias devemos acrescentar mais uma categoria àquelas descritas anteriormente. Trata-se da categoria correspondente aos títulos classificados como pagos, que serão descritos

como“Pag”. Valores classificados em qualquer categoria no período i podem mover-se para a categoria dos títulos pagos ou para qualquer outra categoria de 0 a n no período i + 1. Iremos adotar os procedimentos recomendados pelo Banco Central do Brasil, através da resolução 2.682, que determina que os créditos vencidos há mais de 60 (sessenta) dias, sem garantias, sejam transferidos para as contas de Créditos em Liquidação.

Em 1º de março foi levantada uma amostra de 1050 contas, e em 31 de março foi verificado o comportamento dessas contas:

De 01/03 a 31/03	Integ. Pg	Em dia	Atraso –1 mês	Atraso – 2 meses	Perda	Total
Emitidas até 28/02	150	100	150	0	0	400
Emitidas até 31/01	120	90	90	150	0	450
Emitidas até 31/12	30	40	40	60	30	200

A primeira linha significa que, das faturas emitidas no mês de fevereiro, num total de 400, 150 foram pagas, 100 ainda não venceram e 150 venceram e não foram pagas, contando o atraso de um mês. A segunda linha mostra que, de 450 faturas emitidas no mês de janeiro, 120 foram pagas, 90 ainda não venceram, 90 apresentam atraso de um mês e 150 com atraso de dois meses. Finalmente, a última linha mostra que, de 200 faturas emitidas no mês de dezembro, além da seqüência de pagamentos e atrasos, 30 correspondem à perda, ou seja, atraso superior a 2 meses.

Seja uma carteira de crédito total de R$ 1.000.000,00, conforme mostramos a seguir:

Situação da Carteira	Valor (R$)
Contas em dia	800.000
Contas com atraso de 1 mês	120.000
Contas com atraso de 2 meses	80.000
Valor da carteira	1.000.000

Calcule o valor esperado que será pago.

2. TEORIA DE FILAS

2.1. INTRODUÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS

A teoria das filas envolve o estudo matemático das “filas”, ou filas de espera. Filas podem existir na forma de pessoas ou objetos esperando algum tipo de serviço ou podem existir num sentido mais abstrato, ou seja, não tão visível, como uma “fila” de navios esperando para atracar em um porto.

Um modelo ou sistema de filas pode ser brevemente descrito da seguinte forma: usuários (ou fregueses ou clientes) chegam para receber um certo serviço e, devido à indisponibilidade de atendimento imediato, formam uma fila de espera. A Figura 2.1 ilustra esta idéia. Os termos usuário e serviço são usados com sentido amplo. Podemos estar nos referindo a carros que chegam a um posto de pedágio, máquinas que esperam para serem consertadas, peças que seguem uma linha de montagem ou mensagens que são transmitidas pelos canais de comunicação. Uma rede de filas é formada por várias filas que se interconectam entre si de modo que o usuário ao sair de uma fila pode (com uma certa probabilidade) dirigir-se a outra. Nas redes abertas há fluxo de fregueses entrando e saindo do sistema. Por outro lado, há redes fechadas nas quais o número de usuários permanece inalterado, isto é, não há movimentação de usuários para dentro ou para fora do sistema. Um serviço de manutenção de máquinas pode ser visto como uma rede fechada onde M máquinas se alternam entre os centros de manutenção e de operação. Dessas definições básicas, ramificam-se um sem número de outros modelos de filas adequados às varias áreas, sempre na busca de melhor representar a realidade.

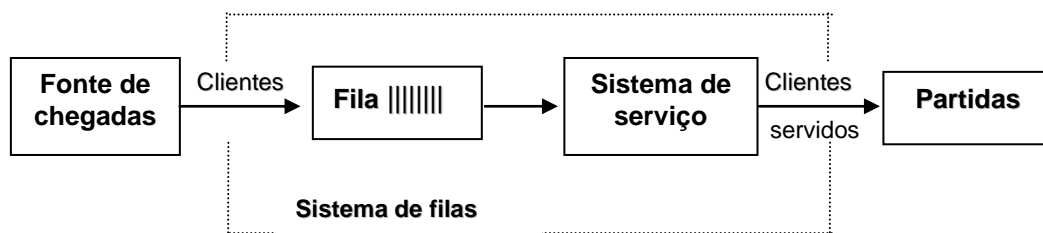



Figura 2.1 - O Processo de Fila Básico

Em aplicações, o estudo dos modelos de filas tem como objetivo a melhoria de desempenho do sistema, entendida, entre outros aspectos, como melhor utilização dos recursos de serviço disponíveis, menor tempo de espera e mais rapidez no atendimento. O pioneiro neste estudo foi A. K. Erlang que, no começo do século, como engenheiro da companhia dinamarquesa de telefones, estudou o problema de congestionamento das linhas. A Telefonia permaneceu a principal aplicação de teoria das filas até por volta de 1950. A partir daí, um grande número de áreas tem utilizado essa ferramenta e a vasta literatura é o melhor indicador dessa expansão.

2.1.1. PORQUE FILAS SÃO ESTUDADAS

As filas são estudadas porque em toda fila, embora nem sempre se perceba, existe embutido um problema econômico e este problema econômico surge porque em qualquer fila existem dois custos envolvidos: o **custo da fila** e o **custo do serviço**.

Para exemplificar o que vem a ser estes dois custos, vamos usar o exemplo citado acima sobre o processo de atracação de navios em um porto. Em qualquer porto, existem os locais onde os navios podem atracar. Estes locais são chamados “berços”. Assim o número de berços dá o número máximo de navios que podem atracar em um porto. Por sua vez, a legislação internacional que regulamenta o tráfego marítimo determina que se ao chegar a um porto (obviamente na data certa), não houver berço para atracar, a administração do porto tem que indenizar a companhia, dona do navio, pelo tempo que ele ficar ao largo esperando berço livre para atracar. Em resumo quando, por qualquer motivo, todos os berços de um porto estão ocupados, os navios que chegam formam uma fila (lógica) aguardando sua vez.

O **custo do serviço** é o custo de construir e manter em funcionamento os berços de atracação. Quanto mais berços oferecidos, ou seja, quanto maior o nível de serviço oferecido, maior este custo.

O **custo da fila** é o custo que a administração do porto tem pelo pagamento das indenizações aos navios que esperam na fila. Este custo é inversamente proporcional ao custo do serviço (número de berços). Se existem poucos berços o custo da fila será grande, mas o custo do serviço será pequeno. Já se existirem muitos berços, o custo do serviço será grande, mas em compensação, como a fila será pequena, o custo da fila será pequeno.

2.1.2. PRINCIPAIS CARACTERISTICAS DE UMA FILA

Algumas das características básicas de uma fila como: chegadas, serviço de disciplina de atendimento e capacidade de espera serão descritas a seguir.

(a) Chegadas

O processo de chegada (*arrival process*) é a descrição de como os usuários procuram o serviço. Se eles chegam a intervalos fixos de tempo, o processo de chegadas é dito constante ou determinístico. Por outro lado, se as chegadas são aleatórias no tempo, elas formam um processo estocástico e é necessário descrever suas propriedades probabilísticas.

A suposição mais comum é de que as chegadas formam um processo de renovação, isto é, os intervalos entre chegadas são independentes e identicamente distribuídos. Em geral, é também assumida a independência em relação ao serviço, mas é possível aplicar um processo de renovação para as chegadas, condicionado à situação do serviço. O processo de Poisson é um processo de renovação com distribuição exponencial e é um dos

mais utilizados para modelar as chegadas. Além de descrever, com boa aproximação, diversas situações práticas, os processos de Poisson incorporam facilidades no tratamento matemático proporcionadas pela “falta de memória” da distribuição exponencial. As distribuições de Erlang e hiperexponencial são também bastante utilizadas. Modelos mais complicados envolveriam possíveis dependências entre as chegadas como, por exemplo, a situação onde uma chegada de certo tipo aumentaria ou diminuiria a chance de ocorrência de outro tipo de chegada.

As chegadas mencionadas acima podem ser unitárias ou em um bloco (*batches*). Neste caso, além do tempo entre chegadas, também o tamanho dos blocos é aleatório. Por exemplo, em aeroportos internacionais, a chegada de passageiros de um certo vôo ao posto alfandegário se dá em bloco, onde o tamanho do bloco é a lotação do avião.

Existem situações em que as chegadas dependem do número de usuários no sistema, podendo até ocorrer a situação em que uma chegada não se junta à fila. Isto pode ocorrer por decisão do usuário ou por limitação no espaço para espera. O caso clássico, conhecido como sistema com perda (*loss system*), originou-se do estudo de tráfego telefônico onde o usuário completa a chamada ou obtém sinal de ocupado e é excluído do sistema. Chegadas com usuários impacientes, que abandonam a fila após algum tempo de espera, podem também ser modeladas.

(b) Serviço

Da mesma forma que o processo de chegada é possível considerar o tempo de serviço como sendo determinístico ou aleatório. A distribuição do tempo de serviço pode depender do estado do sistema ou, até mesmo do tipo de usuário a ser servido. Porém a hipótese mais simples é a de independência, isto é, o serviço é um processo de renovação. Dentre as distribuições mais usadas destacam-se a exponencial, Erlang e hiperexponencial. O número de servidores disponíveis para o atendimento a uma mesma fila também deve ser especificado. Neste caso, é comum mencionar os servidores estão em paralelo numa referência a estarem atendendo uma mesma fila.

(c) Disciplina de Atendimento

A disciplina de atendimento se refere a maneira como os usuários serão selecionados para receber serviço. No nosso cotidiano os atendimentos, em geral, se dão pela ordem de chegada. A fila no caixa do supermercado, a retirada de carros de um estacionamento e a compra de ingressos para o cinema são exemplos dessa disciplina, que será referida como FCFS (do inglês, *first come first served*). Em aplicações, outras disciplinas podem aparecer. A disciplina LCFS (*last come first served*) pode ser usada em modelos de arquivo ou de busca em disco rígidos. O serviço em ordem aleatória, independente do tempo de chegada, pode servir de modelo para alguns sistemas computacionais. Outra disciplina, que tem aplicação em computação é a do processamento ou tempo compartilhado (*processor or time sharing*) que é definida pela dedicação, a todos os usuários presentes no sistema, de uma pequena quantidade de serviço de cada vez. Assim, em rodadas sucessivas, o usuário vai recebendo sua dose de atendimento até que sua requisição total de

serviço seja completada. A disciplina de atendimento pode ainda estabelecer prioridades entre usuários de modo a atender primeiro os de alta prioridade. Em alguns modelos o serviço pode até ser interrompido para dar lugar a um usuário de prioridade mais alta. Quando modelos com prioridade são adotados é necessário especificar como se dará a ordem de atendimento dentro da mesma classe de prioridade e, em geral, FCFS é utilizada nestes casos.

(d) Capacidade do Sistema

É muito comum haver uma limitação física no numero de usuários que podem esperar. Se a capacidade total estiver ocupada, o usuário não poderá entrar no sistema e será perdido ou desviado para outro centro de serviço. Essa limitação se relaciona com a chegada, mas a decisão de não se juntar à fila não é do usuário e sim do sistema de serviço.

Uma fila é caracterizada pelo máximo número permissível de clientes que ela possa conter. As filas são chamadas de **infinitas** ou **finitas**, de acordo com esse número ser infinito ou finito. A suposição de uma fila infinita é o padrão para a maioria dos modelos de fila, mesmo para situações em que na verdade exista um limite superior finito (relativamente grande) no número permissível de clientes, uma vez que tratar com um limite superior seria um fator de complicação na análise. Entretanto, para sistemas de filas em que este limite superior é suficientemente pequeno, para que seja, de fato, alcançado com alguma frequência, torna-se necessário supor uma fila finita.

Variando as características (a) a (d) acima, podemos obter um grande número de modelos, conforme será apresentado a seguir.

2.1.3. NOTAÇÃO DE KENDALL

O professor D. G. Kendall criou, em 1953, uma notação para sistemas de filas que é hoje largamente utilizada. A notação consiste na forma A/B/c/K/Z, onde A descreve a distribuição do tempo entre chegadas, B a distribuição do tempo de serviço, c o número de servidores, K a capacidade da fila de espera (alguns autores definem K como capacidade total de usuários no sistema) e Z a disciplina de atendimento.

Algumas escolhas para A e B são as seguintes:

M: Distribuição Exponencial (de *memoryless*)
E_k: Distribuição de Erlang-k
D: Distribuição Determinística ou degenerada
U: Distribuição Uniforme
G: Distribuição Geral (não especificada)

A omissão de K e Z na representação acima indica que a fila tem capacidade infinita e disciplina FCFS. Por exemplo, a fila M/G/1 tem chegadas exponenciais, o serviço com distribuição geral e um servidor, não há limite na sala de espera e o atendimento é na ordem de chegada. Por outro lado, a fila G/E2/3/15 tem chegadas seguindo uma distribuição geral,

o serviço segue a distribuição de Erlang-2, existem 3 servidores, a capacidade máxima do sistema é 18 (note que a fila máxima tem comprimento 15) e, como nada foi mencionado, a disciplina de atendimento é FCFS.

De forma resumida então podemos apresentar o seguinte formato: A/B/c onde, A representa a distribuição de chegadas, B representa a distribuição do serviço e c indica o número de estações de serviço. Como a distribuição de Poisson inclui as propriedades do processo Markoviano, a notação usada para A e B é M quando temos um processo de Poisson.

2.1.4. TERMINOLOGIA E NOTAÇÕES

A menos que seja dito o contrário, as seguintes notação e terminologia padrões serão usadas deste ponto em diante:

Tabela 2.1 – Terminologias usadas em Teoria das Filas

Estado do Sistema	Número de clientes no sistema de fila
Comprimento da Fila	Número de clientes esperando um serviço ou estado do sistema menos o número de clientes sendo servidos
N (t)	Número de clientes no sistema de fila no tempo t ($t \geq 0$)
P_n (t)	Probabilidade de que exatamente n clientes estejam no sistema de fila no tempo t, dado o número no tempo 0
S	Número de servidores (canais de serviço paralelo) no sistema de fila
λ_n	Taxa média de chegada (número esperado de chegadas por tempo unitário) de novos clientes, quando n clientes estão no sistema.
μ_n	Taxa média de serviço para todo o sistema (número esperado de clientes concluindo o serviço por tempo unitário) quando n clientes estão no sistema
λ, μ, ρ	Vide parágrafo seguinte

Quando λ_n for uma constante para todo n, esta constante será denotada por λ; quando a taxa média de serviço por servidor ocupado for uma constante para todo $n \geq 1$, esta constante será denotada por μ (neste caso, $\mu_n = s\,\mu$, quando $n \geq s$, de modo que todos os s servidores estarão ocupados). Nestas circunstâncias $1/\lambda$ e $1/\mu$ são o **tempo entre chegadas esperado** e o **tempo entre serviços esperado**, respectivamente. Também $\rho = \lambda / s\mu$ é o **fator de utilização** da instalação de serviço, isto é, a fração de tempo esperada em que os servidores estão ocupados, porque $\lambda/s\mu$ representa a fração da

capacidade do serviço do sistema ($s\mu$) que está sendo utilizada em média pelos clientes que chegam (λ).

Também é necessária alguma notação para descrever os resultados do **estado de equilíbrio**. Quando um sistema de fila tenha começado a operar recentemente, o estado do sistema (número de clientes no sistema) será grandemente afetado pelo estado inicial e pelo tempo decorrido desde então. O sistema é dito então estar em **condição transiente**. Entretanto, depois de já ter passado tempo suficiente, o estado do sistema se torna essencialmente independente do estado inicial e do tempo decorrido (exceto sob circunstâncias pouco usuais). O sistema, então, alcançou essencialmente uma **condição de estado de equilíbrio**. A notação mostrada na Tabela 2.2 supõe que o sistema esteja numa condição de estado de equilíbrio:

Tabela 2.2 – Notação utilizada no estado de equilíbrio

N	Número de clientes no sistema de fila
P_n	Probabilidade de que exatamente n clientes estejam no sistema no sistema de fila
L	Número de clientes esperado no sistema de fila
L_q	Comprimento de fila esperado
ω	Tempo de espera no sistema (inclui tempo de serviço) para cada cliente em particular
W	E (ω)
ω_q	Tempo de espera na fila (exclui o tempo de serviço) para cada cliente em particular
W_q	E (ω_q)

2.1.5. RESULTADO DE LITTLE

As relações entre as medidas de desempenho do sistema são conhecidas como fórmulas de Little. Estas relações relacionam o número médio de usuários (L ou L_q) com o tempo médio de espera (W ou W_q) e tiveram a sua primeira demonstração formal no trabalho de Little [1961]. Desde então provas alternativas e extensões têm sido apresentadas e sua validade extrapolou os modelos Markovianos e pode ser verificada para sistemas mais gerais.

Supondo que λ_n seja uma constante λ para todo n. Num processo de fila em estado de equilíbrio, foi provado que:

$$L = \lambda W$$

Além disso, a mesma prova também mostra que:

$$L_q = \lambda W_q$$

Se os λ_n não forem iguais, então λ poderá ser substituído nestas equações por λ/, a taxa média de chegada a longo prazo.

Supondo agora que o tempo médio de serviço seja uma constante, $1/\mu$, para todo $n \geq 1$. Segue então que:

$$W = W_q + 1/\mu$$

Estas relações são extremamente importantes porque permitem que todas as quatro quantidades fundamentais, L, W, L_q, W_q, sejam imediatamente determinadas, assim que uma delas seja encontrada analiticamente. Isto é muito bom porque algumas destas quantidades frequentemente são muito mais fáceis de encontrar que outras, quando estamos resolvendo um modelo de fila a partir de princípios básicos.

2.1.6. EXEMPLOS DE SISTEMAS DE FILAS REAIS

Uma classe importante dos sistemas de filas que todos nós encontramos em nossas vidas diárias é a dos **sistemas de serviço comerciais**, onde os clientes recebem serviços de organizações comerciais. Muitas destas organizações envolvem serviços de pessoa a pessoa num local fixo, tal como uma barbearia (os barbeiros são os servidores), serviço de caixa no banco, as caixas de supermercado e uma fila de lanchonete onde cada um se serve (canais de serviço em série). Entretanto, em muitas outras organizações, isto não ocorre, tais como serviços de assistência técnica a domicilio (o técnico de manutenção vai até o cliente), máquina de venda automática (onde o vendedor é uma máquina), e um posto de gasolina (onde os carros podem ser vistos como os clientes).

Outra classe importante é a dos **sistemas de serviço de transporte**. Para alguns destes sistemas, os veículos são os clientes, tais como os carros esperando num posto de pedágio ou sinaleira de trânsito, um caminhão ou navio esperando para ser carregado ou descarregado por carregadores (ou servidores), e aviões esperando para aterrisar ou decolar de uma pista (o servidor).

Em anos recentes, a teoria de filas, provavelmente tem sido mais aplicada a **sistemas de serviço internos empresa-indústria**, onde os clientes que recebem serviços são internos à organização. Exemplos disto são sistemas de manuseio de materiais, onde unidades de manuseio de materiais (ou servidores) movem as cargas (os clientes). Além disso, as máquinas podem ser vistas como servidores cujos clientes são os trabalhos que estão sendo processados. Um exemplo correlato de grande importância é uma instalação de computador, onde o computador é visto como servidor.

Ultimamente, tem havido um reconhecimento crescente de que a teoria das filas também seja aplicável a **sistemas de serviço social**. Por exemplo, um sistema judicial é uma rede de filas, onde os tribunais são instalações de serviços, os juízes (ou painéis de juízes) são os servidores, e os casos esperando para serem julgados são os clientes. Um

sistema legislativo é uma rede de filas similar, onde os clientes, agora, são os projetos de lei esperando para serem processados.

Embora essas sejam quatro grandes classes dos sistemas de filas, elas ainda não esgotam a lista. De fato, a teoria das filas teve inicio no principio deste século, com aplicações na engenharia telefônica, e ainda permanece como uma importante área de aplicação. Além disso, todos nós temos as nossas filas pessoais – trabalhos de casa, livros para ler, e assim por diante.

2.1.7. A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL NA TEORIA DE FILAS

As características de operação dos sistemas de filas são grandemente determinadas por duas propriedades estatísticas, isto é, a distribuição de probabilidade dos **tempos entre chegadas** e a distribuição de probabilidades dos **tempos de serviço**. Para sistemas de filas reais, estas distribuições podem assumir praticamente qualquer forma (a única restrição é que não podem ocorrer valores negativos). Entretanto, para a formulação de um **modelo** de teoria de filas como uma representação do sistema real é necessário especificar a forma assumida de cada uma destas distribuições. Para ser útil, a forma assumida deveria ser suficientemente realista, para que o modelo forneça predições razoáveis, enquanto que, ao mesmo tempo, fosse suficientemente simples, para que o modelo fosse matematicamente tratável. Nestas bases, a distribuição de probabilidade mais importante na teoria das filas é a **distribuição exponencial**.

Suponhamos que a variável aleatória T represente ou o **tempo entre chegadas** ou o **tempo de serviço.** Quais as implicações de supormos que T tenha uma distribuição exponencial para um modelo de filas? Para explorar isso, é necessário examinar cinco propriedades-chave da distribuição exponencial.

PROPRIEDADE 1: f_T (t) é uma função estritamente decrescente de t ($t \geq 0$).

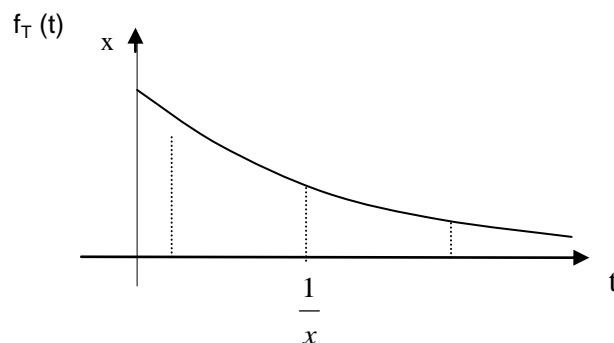



Figura 2.1 – Propriedade 1 da Distribuição Exponencial na Teoria das Filas

Uma conseqüência da propriedade 1 é que:

$P[0 \leq T \leq \Delta t] > P[t \leq T \leq t + \Delta t]$

Para quaisquer valores estritamente positivos de Δt e t. Isto decorre do fato de que essas probabilidades são a área sob a curva $f_T(t)$, dentro do intervalo de comprimento Δt indicado, e de que a altura média da curva é menor para a segunda probabilidade que para a primeira. Por isso, não apenas é possível, como também relativamente provável que T assuma um valor pequeno próximo a zero. De fato,

$$P[0 \leq T \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}] = 0,393$$

enquanto

$$P[\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha} \leq T \leq \frac{3}{2}\frac{1}{\alpha}] = 0,383$$

de modo que é mais provável que o valor de T assuma seja “pequeno”, isto é, menor que a metade de E(T) e não “próximo” ao seu valor esperado, isto é, não muito longe de metade de E(T), mesmo que o segundo intervalo seja duas vezes maior que o primeiro.

O questionamento a ser feito é se esta propriedade para T é realmente razoável num modelo de fila? Se T representar **tempos de serviço**, a resposta dependerá da natureza geral do serviço envolvido, conforme discutido a seguir.

Se o serviço requerido for essencialmente idêntico para cada cliente, com o servidor realizando sempre a mesma seqüência de operações de serviço, então os tempos de serviço reais tenderiam a estar próximos ao tempo de serviço esperado. Podem ocorrer pequenos desvios da média, porém usualmente isso se daria apenas por causa das pequenas variações na eficiência do servidor. Um tempo de serviço pequeno, muito abaixo da média, seria essencialmente impossível porque é necessária uma certa quantidade de tempo mínimo para realizar as operações de serviço requeridas, mesmo que o servidor esteja trabalhando a toda velocidade. Esta claro que a distribuição exponencial não forneceria uma aproximação precisa para a distribuição de tempo de serviço para este tipo de situação.

Por outro lado, consideremos o tipo de situação em que as tarefas específicas requeridas dos servidores sejam diferentes, de cliente para cliente. A natureza geral do serviço pode ser a mesma, porem o tipo especifico e a quantidade de serviço diferem. Por exemplo, este seria o caso no problema do quarto de emergência do Hospital Municipal. Os médicos encontram uma grande variedade de problemas médicos. Na maioria dos casos, eles podem fornecer o tratamento necessário bem rapidamente, porem, ocasionalmente, um paciente requer cuidados extensivos. Uma distribuição de tempo de serviço exponencial parece bastante plausível para este tipo de situação de serviço.

Se T representar os **tempos entre chegadas**, a propriedade 1 exclui situações em que clientes potenciais que se aproximem do sistema de fila tendam a atrasar a sua entrada se virem outro cliente entrando na sua frente. Por outro lado, isto é inteiramente consistente com o fenômeno comum de chegada ocorrendo “aleatoriamente”, que será descrito por propriedades subseqüentes.

PROPRIEDADE 2: Falta de Memória.

Esta propriedade pode ser definida matematicamente como:

$P\{T > t + \Delta t \mid T > \Delta t\} = P\{T > t\}$

Para quaisquer quantidades positivas t e Δt. Em outras palavras, a distribuição de probabilidade do tempo restante até o incidente (chegada ou conclusão do serviço) que ocorre é sempre a mesma, independente de quanto tempo (Δt) já tenha se passado. Com efeito, o processo "esquece" sua história. Este fenômeno surpreendente ocorre com a distribuição exponencial porque

$$P\{T > t + \Delta t \mid T > \Delta t\} = \frac{P\{T > \Delta t, T > t + \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}}$$

$$\frac{P\{T > t + \Delta t\}}{P\{T > \Delta t\}}$$

$$\frac{e^{-\alpha(t+\Delta t)}}{e^{-\alpha t}}$$

$$e^{-\alpha t}$$

Para **tempos entre chegadas**, esta propriedade descreve a situação comum onde o tempo até a chegada seguinte é completamente não influenciado por quando tenha ocorrido a ultima chegada. Para **tempos de serviço**, a propriedade é mais difícil de ser interpretada. Não deveríamos esperar que ela se mantivesse numa situação onde o servidor tivesse que realizar a mesma seqüência fixa de operações para cada cliente porque, então, um serviço logo implicaria que provavelmente pouco restaria a ser feito. Por outro lado, no tipo de situação onde as operações de serviço requeridas diferem de cliente para cliente, a definição matemática da propriedade pode ser bastante realística. Para este caso, se já tiver sido feito um serviço considerável para um cliente, a única implicação pode ser que este cliente em particular requeira mais serviços que a maioria.

PROPRIEDADE 3: O mínimo de diversas variáveis aleatórias independentes exponenciais tem uma distribuição exponencial.

Para definirmos esta propriedade matematicamente, façamos com que $T_1, T_2, ..., T_n$ sejam variáveis aleatórias **independentes** exponenciais, com parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, respectivamente. Façamos também com que U seja a variável aleatória que assuma o valor igual ao **mínimo** dos valores realmente assumidos por $T_1, T_2, ..., T_n$, isto é,

$U = \min \{T_1, T_2, ..., T_n\}$

Portanto, se T_i representar o tempo até que um tipo particular de incidente ocorra, então U representará o tempo até que o **primeiro** dos n incidentes diferentes ocorra. Note-se, agora, que para qualquer $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
P\{U > t\} &= P\{T_1 > t, T_2 > t, ..., T_n > t\} \\
&= P\{T_1 > t\}\, P\{T_2 > t\} \, ... \, P\{T_n > t\} \\
&= e^{-\alpha 1t}\, e^{-\alpha 2t} \, ... \, e^{--\alpha nt} \\
&= \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t \right\}
\end{aligned}
$$

de modo que U de fato tem uma distribuição exponencial com parâmetro:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Esta propriedade tem algumas implicações para os **tempos entre chegadas** nos modelos de filas. Especificamente, vamos supor que existam diversos (n) tipos diferentes de clientes, porém os tempos entre chegadas para cada tipo (tipo i) tenham uma distribuição exponencial com parâmetro α_i (i = 1, 2,..., n). Pela propriedade 2 o tempo **restante** a qualquer instante especifico até à chegada seguinte de um cliente do tipo i teria esta mesma distribuição. Portanto, fazendo com que T_i seja este tempo restante medido a partir do instante em que um cliente de **qualquer** tipo chegue. A propriedade 3, então, nos diz que U, os tempos entre chegadas para o sistema de fila como um todo, tem uma distribuição exponencial com parâmetro α definido pela equação acima. Como resultado, podemos optar por ignorar a distinção feita entre os clientes e ainda termos tempos entre chegadas exponenciais para o modelo de fila.

Entretanto, as implicações são ainda mais importantes para **tempos de serviços** nos modelos de filas que tenha mais de um servidor. Por exemplo, considerando a situação em que todos os servidores tenham a mesma distribuição exponencial de tempo de serviço, com parâmetro μ. Para este caso, façamos com que n seja o número de servidores, prestando serviços atualmente, e façamos com que T_i seja o tempo de serviço **restante** para o servidor i (i = 1, 2, ..., n), o qual também um distribuição exponencial, com parâmetro $\alpha_i = \mu$. Segue-se, então, que o U, o tempo até conclusão de serviço seguinte, de qualquer destes servidores, tenham uma distribuição exponencial, com parâmetro $\alpha = n\mu$. Com efeito, o sistema de fila **atualmente** seria processado exatamente como um sistema de um servidor **único**, onde os tempos de serviço têm uma distribuição exponencial com parâmetro $n\mu$.

PROPRIEDADE 4: Relação com a distribuição de Poisson.

Suponhamos que o tempo entre ocorrências consecutivas de algum tipo de incidente particular (por exemplo, chegadas, ou conclusão de serviços por um servidor continuamente ocupado) tenha uma **distribuição exponencial** com parâmetro α. A propriedade 4 então, tem a ver com a implicação resultante quanto a distribuição de probabilidade do **número** de

vezes em que este tipo de incidente ocorre dentro de um espaço de tempo específico. Em particular, fazendo com que X(t) seja o número de ocorrências no tempo t (t>0), onde o tempo 0 designa o instante em que se começa a contar. A implicação é que:

$$P\{X(t) = n\} = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}, \text{ para } n = 0, 1, 2, ...$$

isto é, X(t) tem uma **distribuição de Poisson,** com parâmetro αt. Por exemplo, com n = 0,

$$P\{X(t) – 0\} = e^{-\alpha t}$$

o qual é exatamente a probabilidade da distribuição exponencial de que o **primeiro** incidente ocorra depois do tempo t. A média desta distribuição de Poisson é:

$$E\{X(t)\} = \alpha t$$

de modo que o número esperado de incidentes por **tempo unitário** é α. Assim, é dito ser **a taxa média** a qual os incidentes ocorrem. Quando os incidentes são contados em uma base contínua, o processo de contagem {X(t): t>0} é dito ser um **processo de Poisson**, com parâmetro α (a taxa média).

Esta propriedade fornece informações úteis sobre as **conclusões dos serviços** quando os tempos dos serviços têm uma distribuição exponencial com parâmetro μ. Isto é feito definindo-se X(t) como o número de conclusões de serviços atingido por um servidor **continuamente ocupado** no espaço de tempo t onde $\alpha = \mu$. Para os modelos de filas de **servidores múltiplos,** X(t) também pode ser definido como o número de conclusões de serviços atingido por n servidores continuamente ocupados no espaço de tempo t onde $\alpha = n\mu$.

A propriedade é particularmente útil para descrever o comportamento probabilístico das **chegadas**, quando os tempos entre chegadas têm uma distribuição exponencial com o parâmetro λ. Neste caso, X(t) seria o **número** de chegadas no espaço de tempo t, onde $\alpha = \lambda$ é a **taxa média de chegada**. Portanto, as chegadas ocorrem de acordo com um **processo de chegada de Poisson.** Tais modelos de filas também são descritos como uma **chegada de Poisson.**

Às vezes é dito que as chegadas ocorrem **aleatoriamente**, entendendo-se por isso que elas ocorrem de acordo com um processo de chegada de Poisson. Uma interpretação intuitiva deste fenômeno é que cada período de tempo de extensão fixa tem a **mesma** chance de ter uma chegada, independentemente de quando tenha ocorrido a chegada precedente, como sugerido pela propriedade que se segue.

PROPRIEDADE 5: Para todos os valores positivos de t, $P\{T \leq t + \Delta t \mid T > t\} \approx \Delta t$, para Δt pequeno.

Para uma variável aleatória T que tem uma distribuição exponencial, com parâmetro α, a propriedade 2 implica que

$$P\{T \leq t + \Delta t \mid T > t\} = P\{T \leq \Delta t\}$$
$$P\{T \leq t + \Delta t \mid T > t\} = 1 - e^{-\alpha \Delta t}$$

para quaisquer quantidades positivas de t e Δt. Portanto, como a expansão de série de e^x para qualquer expoente x é

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

segue-se que

$$P\{T \leq t + \Delta t \mid T > t\} = 1 - 1 + \alpha \Delta t - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\alpha \Delta t)^n}{n!}$$

$$\approx \alpha \Delta t, \text{ para } \Delta t \text{ pequeno,}$$

porque os termos do somatório tornam-se relativamente negligenciáveis para valores suficientemente pequenos de $\alpha\Delta$t. Note-se que o valor de t realmente não afeta esta estabilidade.

Como indicado anteriormente, T pode representar tanto **tempos entre chegadas** quanto **tempos de serviços** nos modelos de filas. Por isso, esta propriedade oferece uma aproximação conveniente da probabilidade de que o incidente em questão (chegada ou conclusão de serviços) ocorra no intervalo (Δt) de tempo pequeno seguinte. A propriedade também mostra que esta probabilidade é essencialmente proporcional a Δt para valores pequenos de Δt.

2.1.8. PROCESSO DE POISSON

As propriedades do chamado Processo de Poisson se ajustam muito bem aos modelos básicos de filas. Este fato fez com que as soluções analíticas para modelos de filas pudessem ser obtidas para àqueles modelos. A obtenção de soluções analíticas para modelos que não seguem o Processo de Poisson são, quando viáveis, matematicamente complexas e extremamente trabalhosas.

A seguir são apresentadas as propriedades fundamentais do Processo de Poisson, já adaptadas para sistemas de filas. Cabe ressaltar que estas propriedades são provadas matematicamente.

(1) O número de chegadas (ou de serviços completados) em uma unidade de tempo especificada é independente do numero de chegadas (ou término de serviços) em qualquer outra unidade.

(2) O número médio de chegadas (ou término de serviços) por unidade de tempo é proporcional ao tamanho da unidade de tempo.

(3) A probabilidade de ocorrência de 2 chegadas simultâneas (ou término de 2 serviços) em uma unidade de tempo muito pequena (Δt) tende a zero.

(4) A probabilidade de 1 chegada (ou término de serviço) ocorrer em uma unidade de tempo muito pequena, Δt, é sempre a mesma, independente do instante Δt.

(5) Se a distribuição das chegadas (discreta) segue a distribuição de Poisson, então a distribuição do intervalo entre chegadas (continua) segue a Exponencial.
Se a distribuição da duração do serviço (continua) segue a Exponencial, então a distribuição dos serviços completados (discreta) segue a Poisson.

2.2. FILAS MARKOVIANAS (PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE)

2.2.1. SISTEMAS INFINITOS

2.2.1.1. Modelo M|M|1

Este é o modelo de fila mais simples, a qual possui as seguintes características:

- Tamanho permitido para a fila infinito;
- Chegadas seguindo a distribuição de Poisson;
- Duração do serviço seguindo a distribuição Exponencial;
- Fila única com seleção FIFO (primeiro a entrar, primeiro a sair);
- 1 estação de serviço.

A Figura 2.2 apresenta esquematicamente o funcionamento dessa fila.

Figura 2.2 – Fila M|M|1

Sejam $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ e $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$ as distribuições do intervalo entre chegadas e de duração do serviço, respectivamente. Os parâmetros λ e μ são referidos como taxas, indicando o número médio de usuários que chegam ou são servidos por unidade de tempo.

Denotando por N(t) o número de usuários no sistema no instante t, pode-se demonstrar que $\{N(t);\ t \geq 0\}$ é um processo de Markov em tempo contínuo com o espaço de estados sendo os inteiros não negativos.

O tempo de espera para fazer uma transição só depende do estado presente e, se o sistema contém pelo menos um usuário, terá distribuição exponencial de parâmetro $(\lambda + \mu)$ correspondente ao mínimo entre duas exponenciais independentes (serviço e chegada). No caso de não haver nenhum usuário no sistema, o tempo para uma transição terá distribuição exponencial de parâmetro λ.

O processo de Markov N(t) é de fato um processo de nascimento e morte com taxas independentes do estado do sistema. Para $n > 0$, a transição do estado n a n+ 1 se dá com taxa λ e entre n e n – 1 com taxa μ. Quando n = 0, só pode haver chegadas. Dessa forma, chegadas correspondem a nascimentos e o fim de serviço a uma morte. A Figura 2.3 apresenta um diagrama com taxas de mudança de processo.

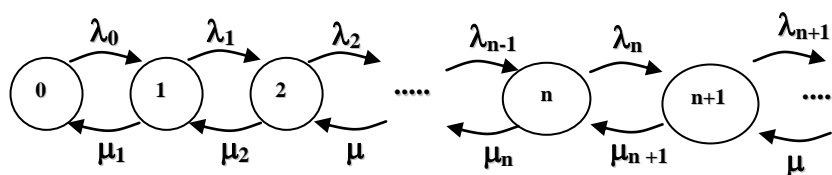



Figura 2.3 – Taxas de transição no processo de Markov

A condição básica para que um sistema de fila seja estável é que a taxa de chegada seja menor do que a taxa de serviço, ou seja, λ/μ tem que ser menor do que 1. Essa fração é o fator de utilização da fila e será denotado por ρ para facilitar a visualização das fórmulas.

Seja Pn(t) = P(N(t) = n) a distribuição de probabilidade do número no sistema no instante t; sua respectiva distribuição estacionária será Pn.

Vamos escrever as equações de equilíbrio do sistema usando o procedimento conhecido como balanço de fluxo e, a partir delas, obter a distribuição estacionária.

Definimos o fluxo como o produto da probabilidade estacionária pela taxa de transição. Vamos admitir que, em regime estacionário, o sistema permanece uma fração do tempo Pn no estado n. Dessa forma, se chegam λ usuários por unidade de tempo, a taxa de fluxo médio que entra em n + 1, proveniente do estado n, é λPn. Se condições de equilíbrio existem, então, para cada estado, o fluxo que sai deve ser igual ao fluxo que entra nesse estado. Para determinar o fluxo total que sai do estado n $(n \geq 1)$, notamos que o sistema vai a n + 1 se uma chegada ocorre e a n – 1 se acontece um fim de serviço. O fluxo total que entra no estado n vem a partir de n + 1 com um fim de serviço ou então, a partir de n – 1,

pela ocorrência de uma chegada, enquanto o fluxo que entra, vem do estado 1 devido a um fim de serviço. As equações de balanço são as seguintes:

$\lambda P_n + \mu P_n = \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1}$ Eq. 2.1(a)

$\lambda P_0 = \mu P1$ Eq. 2.1(b)

Esse sistema é denominado de equações de balanço global e será resolvido por indução matemática.

Resolvendo as equações 2.1 para n = 0,1,2,... temos:

$P1 = (\lambda/\mu) P_0$
$P2 = (\lambda/\mu)2 P_0$
$P3 = (\lambda/\mu)3 P_0$

A expressão sugerida seria Pk = (λ/μ)k P0. Supomos que seja válida para K = n e vamos verificar que também vale no caso n + 1. de 2.1(a) vem:

$(\lambda + \mu)(\lambda/\mu)^n P_0 = \mu P_{n+1} + \lambda(\lambda/\mu)^{n-1} P_0$

De onde temos que:
$P_{n+1} = (\lambda/\mu)^{n+1} P_0$

Essa equação é equivalente a
$P_{n+1} = (\rho)^{n+1} P_0$

Utilizando a condição de que a soma das probabilidades estacionárias deve ser igual a 1. Calcularemos P_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}$$

A soma acima é a da série geométrica de razão ρ que convergirá se e só se $|\rho| < 1$. Como λ e μ são estritamente positivos, essa condição equivale a $0 < \rho < 1$. Note que nessa condição, a taxa média de serviço por unidade de tempo (μ) é maior do que a taxa média com que os fregueses estão chegando (λ). Portanto, independente do quanto crescer, a fila se esvaziará de tempos em tempos e o processo de Markov será recorrente positivo com uma única distribuição de equilíbrio. Efetuando a soma da série acima obtemos $P_0 = (1 - \rho)$ e então,

$P_n = \rho^n (1 - \rho)$, $n \geq 0$, $0 < \rho < 1$

A partir da distribuição estacionária, vamos calcular o número médio de usuários na fila e no sistema. Seja N o número total de usuários no sistema em regime estacionário e L sua média. Temos:

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

Este último somatório pode ser reescrito como

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + ... = \rho(1 + 2\rho + ...) = \rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

A derivada de ρ^n em relação a ρ é dada por $n\rho^{n-1}$. Assim, admitindo satisfeitas as condições para inverter os sinais de somatório e derivada, obtemos:

$$L = (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^n = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

Concluímos então que:

$$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Seja N_q o número de usuários na fila e L_q seu valor esperado. Temos,

$$L_q = E(N_q) = 0P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

Então,

$$L_q = L - (1-P_0) = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

<u>Outras fórmulas para o modelo M/M/1</u>

Tempo médio (esperado) que cada unidade permanece no sistema:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Tempo médio (esperado) que cada unidade permanece na fila:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Probabilidade de 1 unidade demorar mais de t unidades de tempo no sistema:

$$P(T > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}$$

Podemos ter ainda as seguintes relações entre as medidas básicas:

$$L_q = L - \rho = \lambda W_q$$

$$L = L_q + \rho = \lambda W$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

2.2.1.2. Modelo M|M|S

Neste tipo de modelo, considera-se que as estações de serviço são equivalentes e prestam serviço, individualmente, a mesma taxa média μ.

Aqui o fator de utilização é $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$

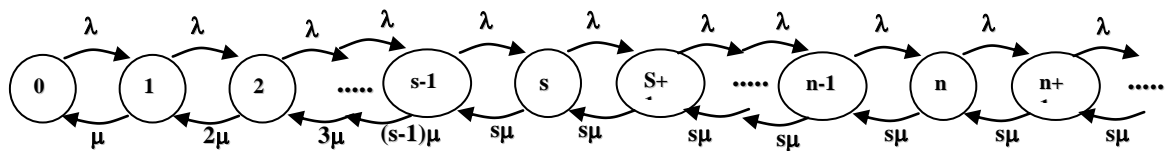



Figura 2.4 – Taxas de transição no processo de Markov

Pelo diagrama, mostrado na Figura 2.4, temos:

$$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) P_1 = \left(\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\right) P_0$$

$$P_3 = \left(\lambda / 3\mu\right) P_2 = \left(\lambda^3 / 6\mu^3\right) P_0$$

……………………………..

$$P_s = \left(\lambda / s\mu\right) P_{s-1} = \left(\lambda^s / s!\,\mu^s\right) P_0$$

$$P_{s+1} = \left(\lambda / s\mu\right) P_s = \left(\lambda^{s+1} / s.s!\,\mu^{s+1}\right) P_0$$

……………………………...

$$P_n = \left(\lambda / s\mu\right) P_{n-1} = \left(\lambda^n / s^{n+1} s!\,\mu^n\right) P_0 = \left(\lambda^{n-s} / s^{n-s}\,\mu^{n-s}\right)\left(\lambda^s / s!\,\mu^s\right) P_0$$

Podemos escrever da seguinte forma:

$$P_n = \rho^{(n-s)} \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s} P_0$$

isso implica que:

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right) P_0 & ,\text{se } n \le s \\ \rho^{n-1}\left(\dfrac{\lambda^s}{s!\,\mu^s}\right) P_0 & ,\text{se } n \ge s \end{cases}$$

Logo, calcularemos P_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{s\le 1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s} \sum_{n\ge s} \rho^{n-s} \right\} = 1$$

o que implica em:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s (1-\rho)} \right\}^{-1} \Rightarrow P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right\}^{-1}$$

$$L_q = \frac{(s\rho)^{s+1} P_0}{s \times s!(1-\rho)^2}$$

As demais fórmulas para L, W, W_q são iguais ao modelo M|M|1.

2.2.2. SISTEMAS FINITOS

2.2.2.1. Modelo M|M|1/M

Esta é a situação na qual a fila pode acomodar somente um número finito de usuários, ou seja, se um usuário chega e a fila está cheia, ele vai embora sem esperar o atendimento.

Observe que neste caso a taxa de chegada λ não precisa ser menor que a taxa de serviço μ, pois a fila tem um tamanho fixo (finito).

Neste tipo de modelo aparece uma nova variável (M), que é o número máximo de usuários que podem estar no sistema, sendo M-1 o número permitido na fila.

As fórmulas para este modelo são:

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}} \; p/\lambda \neq \mu \\ \dfrac{1}{M+1} \; p/\lambda = \mu \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 \, p/\lambda \neq \mu \\ P_0 \, p/\lambda = \mu \end{cases}$$

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

A taxa de chegada dos usuários no sistema é λ. No entanto alguns usuários chegam e encontram a fila cheia, ou seja, vão embora. A taxa de chegada efetiva (λ_{ef}) dá a taxa média das unidades que realmente permanecem no sistema.

$$\lambda_{ef} = \mu(1 - P_0) = \lambda(1 - P_M)$$

As demais fórmulas ficam como:

$$W = \frac{L}{\lambda_{ef}} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} \qquad \rho = \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

2.2.2.2. Modelo M|M|s/M

Fila Finita (s > 1)

Nesta seção vamos redefinir ρ e $\overline{\rho}$ para simplificar a escrita das fórmulas:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad\qquad \overline{\rho} = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Temos então:

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\rho^n\right) + \frac{1}{s!}\rho^s \left(\sum_{n=s+1}^{\infty} \overline{\rho}^{\,n-s}\right)}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\rho^n P_0 \; p/n \le s \\ \frac{\rho^n P_0}{s!\, s^{n-s}} \; p/s < n \le M \\ 0 \, p/n > M \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 \rho^s \overline{\rho}}{s!\left(1-\overline{\rho}\right)^2}\left[1-\overline{\rho}^{\,M-s} - (M-s)\overline{\rho}^{\,M-}\left(1-\overline{\rho}\right)\right]$$

$$L = L_q + s - \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)P_n$$

$$\lambda_{ef} = \mu\left[s - \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)P_n\right]$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} \qquad\qquad W = \frac{L}{\lambda_{ef}} \qquad\qquad W = \frac{L}{\lambda_{ef}}$$

onde s é o número de estações de atendimento e M é o tamanho da população.

<u>População Finita</u>

Em muitos problemas práticos, a consideração de que a população é de tamanho infinito leva a resultados distorcidos, visto que, na verdade, a população é pequena para ser considerada de tamanho infinito. Quando isto ocorre, a presença de um ou mais usuários no sistema tem um forte efeito na distribuição das chegadas futuras e, o uso de um modelo com população infinita conduz a resultados errados. Alguns exemplos típicos são: um pequeno grupo de máquinas que quebram de tempos em tempos necessitando conserto, um pequeno grupo de mecânicos que vão a determinado balcão pegar peças ou ferramentas. Num caso extremo do primeiro exemplo, se todas as máquinas estão quebradas, nenhuma chegada pode ocorrer.

Isto contrasta com os modelos de população infinita nos quais a taxa de chegada é independente do número de usuários que já estão no sistema. Neste tipo de modelo, a taxa de chegada λ, é a taxa de chegada de cada unidade, ou seja, $1/\lambda$ é o tempo médio entre chegadas de cada unidade. No caso das máquinas, por exemplo, seria o tempo médio entre quebra de cada máquina.

A taxa de chegada efetiva, λ_{ef}, dá a taxa média de chegada, considerando-se todos os usuários.

As fórmulas para este tipo de modelo são bastante complexas e não serão apresentadas aqui.

2.3. MODELO DE ERLANG

Se uma variável aleatória t é regida por uma distribuição de Erlang, de ordem k, ela pode ser interpretada como equivalente à soma de k variáveis aleatórias regidas por distribuições exponenciais iguais.

Admitamos que o intervalo entre chegadas sucessivas seja regido por uma distribuição de Erlang de ordem k, definida pela função densidade de probabilidade:

$$f(t) = \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\lambda t}, \quad t \geq 0$$

O valor esperado de t é dado por:

$$E[t] = \frac{1}{\lambda}$$

e a variância de t por:

$$Var[t] = \frac{1}{k\lambda^2}$$

Para k = 1 tem-se a distribuição exponencial e o processo de chegada é Poisson. À medida que k aumenta, a variância tende a zero ($Var[t] \to 0$), a dispersão relativa da distribuição diminui, atingindo a situação determinística quando $k \to \infty$. Neste caso, a distribuição de Erlang representa exemplos de tempos de chegadas periódicos ou regulares, isto é, um intervalo constante, de $1/\lambda$, entre chegadas. A Figura 2.5 – Distribuição de Erlang
mostra o comportamento da distribuição de Erlang para diferentes k.

Freqüentemente, a distribuição de Erlang é apresentada pelo símbolo E_k.

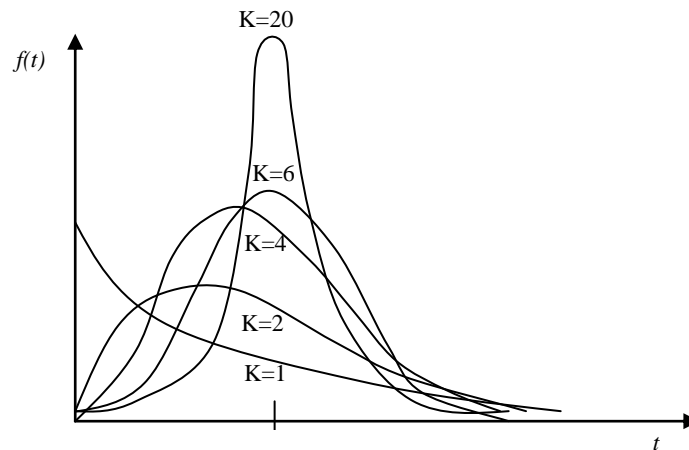



Figura 2.5 – Distribuição de Erlang

Em resumo, se T_1, T_2, ..., T_k são variáveis aleatórias com distribuições exponenciais idênticas e com valor esperado igual a $1/k\lambda$, então, $T = T_1 + T_2 + ... + T_k$ tem distribuição de Erlang com parâmetros k e λ. Chama-se de "serviço completo", a soma de k subserviços idênticos, ou seja, um serviço de Erlang pode ser decomposto em k subserviços.

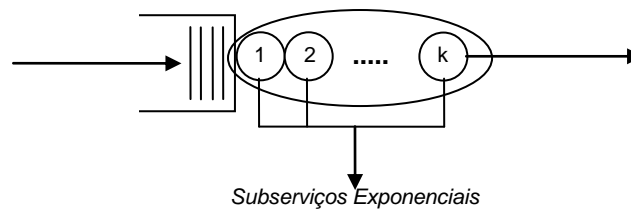



Figura 2.6 – Servidor Erlang

2.3.1. SISTEMA M|E_K|S

No sistema M|M|S os estados correspondem ao número de clientes no sistema. No caso de um sistema M|E_k|S os estados correspondem ao número de subserviços a ser executado e cada cliente "traz" k subserviços.

Através da Figura 2.7 – Diagrama de estados da fila M|Ek|1
pode-se verificar o que foi dito anteriormente; em filas com servidor Erlang, um novo cliente só entra no sistema após o cliente que está sendo atendido ter passado por todos os k estágios de serviço.

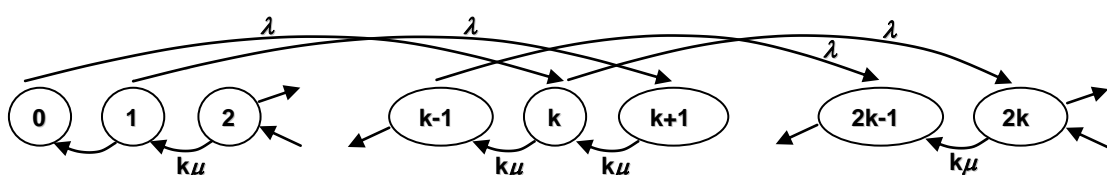



Figura 2.7 – Diagrama de estados da fila M|E_k|1

O número médio de clientes na fila para este tipo de sistema é dado por:

$$L_q = \frac{1+k}{2k}\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

e o número médio de clientes no sistema é $L = \lambda W$.

A tempo médio de um cliente na fila é dada por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

e o tempo médio de um cliente no sistema é $W = W_q + \frac{1}{\mu}$.

O fator de utilização do sistema é dado por: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Verifica-se, mais uma vez, que se $k = 1$, $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$, que é o resultado do sistema M|M|1. Enquanto que se $k = \infty$, $L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$, que é o resultado do sistema determinístico M|D|1.

2.3.2. SISTEMA E_K|M|1

Neste tipo de sistema as distribuições do tempo entre chegadas e de serviço são invertidas em relação à seção 2.3.1 - SISTEMA M|EK|S.

O sistema E_k|M|S opera da seguinte maneira: dado que um cliente acabou de chegar no sistema, então, uma nova chegada de cliente é imediatamente introduzida. Quando esta chegada é inserida, ela deve passar através de k estágios exponenciais, cada um com parâmetro kλ, como mostra a Figura 2.8 – Sistema Ek|M|1

.

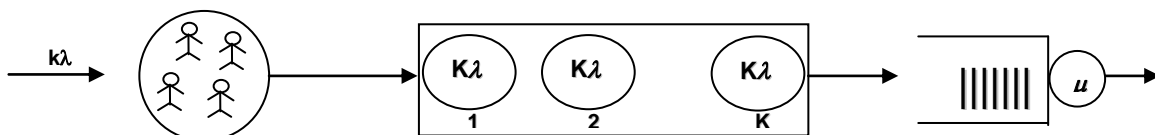



Figura 2.8 – Sistema E_k|M|1

Para este tipo de sistema, o diagrama de estados está mostrado na Figura 2.9 – Diagrama de estados para o sistema Ek|M|1

.

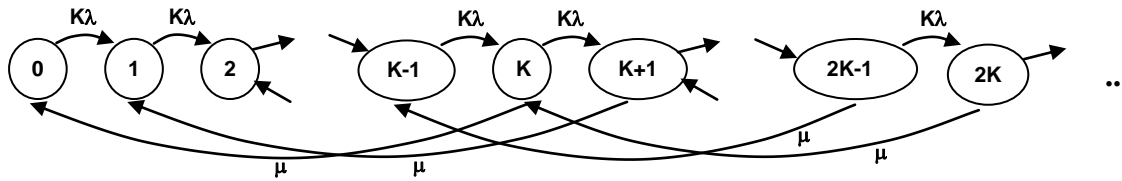



Figura 2.9 – Diagrama de estados para o sistema $E_k|M|1$

2.4. REDES DE FILAS MARKOVIANAS

Uma rede de filas, ou sistema de múltiplos nós, é formada por várias filas interconectadas entre si com usuários deslocando-se entre elas para receber serviço. A rede pode ser *aberta* ou *fechada*, dependendo de poder enviar e receber usuários de fora da rede. Isto é, em uma rede fechada o número total de usuários não se altera, havendo apenas uma permutação nas suas posições. Já nas redes abertas, a presença total varia pela chegada ou saída externa de usuários.

Algumas considerações devem ser feitas no estudo de rede de filas. Por exemplo, a estrutura topológica da rede é importante, uma vez que ela descreve as transições possíveis entre os nós. Os caminhos feitos por cada "cliente" também devem ser descritos. A natureza do fluxo estocástico, em termos do processo estocástico básico que descreve este fluxo, tem grande significância. Considere a rede com dois nós, mostrada na Figura 2.10 – Rede de filas Markovianas com 2 estações

.

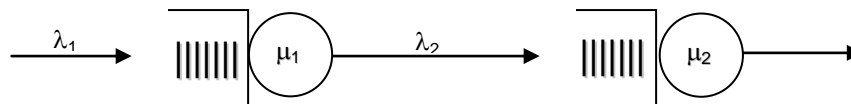



Figura 2.10 – Rede de filas Markovianas com 2 estações

Assumindo-se que as chegadas ao sistema obedecem ao processo de Poisson a uma taxa λ_1 e que o servidor 1 atende com distribuição exponencial a uma taxa μ_1. Então, o nó 1 representa um sistema de filas M|M|1. Da mesma forma, o nó 2, isoladamente, representa um sistema de filas M|M|1. A questão básica é encontrar a distribuição do tempo entre chegadas no nó 2, que será equivalente a distribuição do tempo entre partidas do nó 1. Pode-se dizer que, em média, o valor da taxa de chegada ao nó 2 é:

$$\lambda_2 = \begin{cases} \lambda_1 & se \quad \lambda_1 < \mu_1 \\ \mu_1 & se \quad \lambda_1 \geq \mu_1 \end{cases}$$

Ou seja, quando $\lambda_2 = \mu_1$, significa que o servidor 1 é um limitador e deve-se passar a analisar apenas as filas seguintes a este servidor.

2.4.1. SISTEMA ABERTO SEM REALIMENTAÇÃO

Uma rede aberta, também denominada rede aberta de Jackson, exemplificada na Figura 2.11, consiste de um conjunto de J nós, com as seguintes características:

a) As chegadas **externas** a cada estação $i \in$ J ocorrem de acordo com um processo de Poisson de parâmetro λ_i, independente das outras chegadas e do serviço nas estações;

b) Para cada nó i $\in$ J, o atendimento é realizado em ordem de chegada, segundo uma distribuição exponencial de parâmetro μi(ni), μi(0) = 0. A dependência da taxa ao número de usuários no centro de serviço permite, entre outras opções, que vários servidores em paralelo atendam com a mesma taxa;

c) Após o usuário completar seu serviço na estação i, ele move-se para mais serviço na estação j, com probabilidade $r_{i,j}$, onde i,,j $\in$ J. Por outro lado, se o usuário já completou sua demanda de serviço na rede, ele deixa o sistema após ser atendido na estação i, com probabilidade $r_{i,J+1} = 1 - \sum_{k=1}^{J} r_{i,k}$, onde J+1 é um nó artificial que representa o exterior da rede. Todas as transferências são assumidas serem instantâneas e assim, o tempo gasto no sistema é proveniente de esperas e atendimentos nas estações.

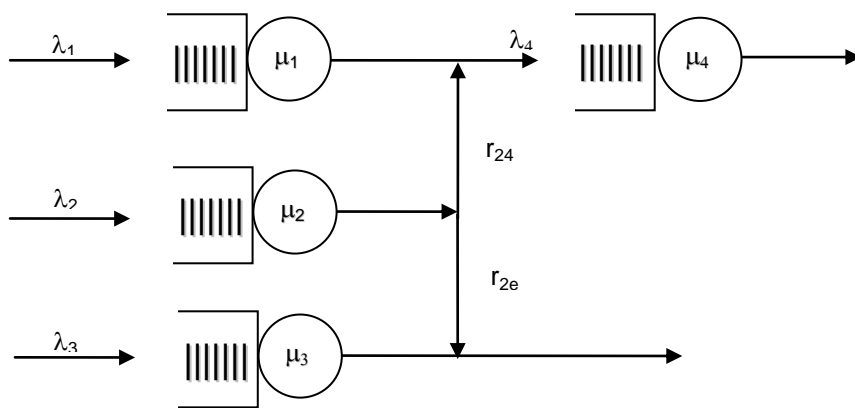



Figura 2.11 – Sistema aberto sem realimentação

Seja R a matriz quadrada de ordem J+1 formada pelas probabilidades de mudança das estações (incluindo o nó externo) e mais a probabilidade para as entradas externas através do nó i:

$$r_{J+1,i} = \frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^{J} \lambda_k} \quad ,\forall i \in J \; e \quad r_{J+1,J+1} = 0 \, .$$

Dessa forma, R torna-se uma matriz estocástica e, portanto, representando as transições para alguma cadeia de Markov.

Da teoria de Cadeias de Markov, diz-se que um estado i comunica-se com outro estado j ($i \rightarrow j$) quando é possível, em algum número de etapas, partir de i e alcançar j. Isto é, existe uma seqüência de estações $i_0 = i$, i_1, i_2, i_3, ..., $i_k = j$, de modo que, para algum índice k > 0, tem-se:

$$r_{i,i_1} r_{i_1 i_2} r_{i_2 i_3} \ldots r_{i_{k-1} i_k} r_{i_k j} > 0$$

A fim de garantir que todos os centros de serviço possam receber usuários e que os fregueses que entram tenham probabilidade positiva de sair em algum momento, acrescenta-se mais duas condições, além das mencionadas anteriormente:

d) Todos os nós da rede poderão receber usuários externos de forma direta ou indireta. Isto é, $\forall\, j \in$ J ou $\lambda_i > 0$ ou existe um i tal que $\lambda_i > 0$ e $i \rightarrow j$.

e) O usuário servido em i tem probabilidade positiva de sair da rede em uma ou mais etapas. Ou seja, $\forall$ i $\in$ J ou ri,J+1 > 0 ou existe um j $\in$ J tal que rj,J+1 > 0 e i$\rightarrow$j.

Com as condições acima, a cadeia de Markov associada à matriz R será recorrente não nula e as equações de "tráfego": $\gamma_m = \lambda_m + \sum_{k=1}^{J} r_{ik} \gamma_k \, , m \in J$ terão solução única. Pode-se interpretar γ_m como a taxa total de entradas ao nó $m \in$ J, sendo resultado da composição das chegadas (externas) com as saídas de estações que se movimentam para o centro m.

Seja N o processo estocástico de dimensão J representando, em tempo contínuo, o número de usuários em cada estação de serviço da rede. Este processo é Markoviano com espaço de estados dado pelo produto cartesiano dos números naturais, $\{0, 1, ...\}^{x\,J}$. Deve-se notar que as transições neste processo são de três tipos: chegadas externas, fim de serviço com mudança de nó (o que acarreta uma chegada interna) e fim de serviço com saída da rede. Se a rede não está vazia, o tempo de espera para uma transição é o mínimo entre todos os serviços que estão sendo realizados e as chegadas externas. Como todos esses tempos são exponenciais independentes, segue que a espera para uma transição também será exponencial, com parâmetro dependendo do estado do sistema antes da transição. Se a rede está vazia, será necessário esperar pela primeira chegada, que será o mínimo entre os tempos de chegadas externas e, portanto, com distribuição exponencial.

2.4.2. SISTEMA FECHADO

Nas redes de filas fechadas, o número de clientes no sistema é constante, não há entradas nem saídas externas.

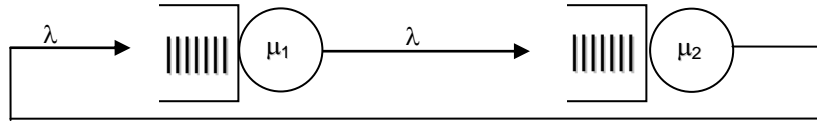



Figura 2.12 – Rede de filas fechada

Seja M o número total de clientes na rede, isto é, para qualquer t, é preciso ter $\sum_{i=1}^{J} n_i = M$. Como não há entradas nem saídas, a taxa de chegadas externa λ_i é igual a zero para todo $i \in$ J. A matriz R perde, então, a linha e a coluna J + 1. A equação de tráfego torna-se assim:

$$\gamma_m = \sum r_{i,k}\gamma_k\,, \quad m \in J$$

Pelas hipóteses já apresentadas no item 2.4.1, que trata de rede de filas aberta, a matriz R é finita e irredutível M e a equação acima terá solução única com a imposição de alguma condição extra (por exemplo, fixar o valor de um dos γ's ou de sua soma.

2.4.3. SISTEMAS MISTOS OU ABERTOS COM REALIMENTAÇÃO

Considere a rede de filas mostrada na Figura 2.13:

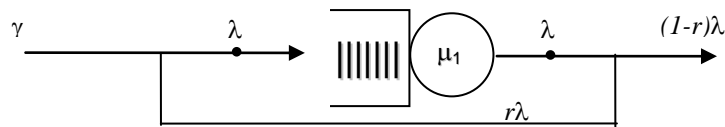



Figura 2.13 – Sistema Misto ou Aberto com Realimentação

Os clientes saem da estação a uma taxa λ, retornam a fila com probabilidade r e, conseqüentemente, a uma taxa $r\lambda$ e saem do sistema com probabilidade (1-r) e taxa (1-r)λ. No equilíbrio, sabe-se que o número de clientes que entra no sistema é igual ao número de clientes que sai do sistema. Portanto, pode-se determinar a taxa λ através da seguinte equação:

$\gamma = (1-r)\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\gamma}{(1-r)}$,

ou seja, $\Lambda = f(\gamma, r)$

Quando a probabilidade de retorno à fila (r) é grande, cada chegada externa é seguida por uma “rajada” interna de chegada.

2.4.4. TEOREMA BURKE

Uma propriedade interessante da fila M|M|1, que simplifica bastante a combinação destas filas em uma rede, é o fato de que a saída de uma fila M|M|1 com taxa de chegada λ é um processo de Poisson de taxa λ. Ou ainda: “Um processo de Poisson, com parâmetro λ, de chegada a um servidor exponencial gera um processo de Poisson de saída com a mesma taxa λ.”

Considere a rede de filas da Figura 2.10 – Rede de filas Markovianas com 2 estações
, seja d(t) a função de distribuição de probabilidade (***fdp***) que descreve o intervalo entre partidas da fila 1 e seja sua transformada de Laplace denotada por D*(s). Quando um cliente sai da fila 1, existem duas situações possíveis: um segundo cliente está disponível na fila e pronto para ser atendido ou a fila está vazia. No primeiro caso, o tempo até que o próximo cliente saia da fila 1 será distribuído exatamente como um tempo de serviço desta fila e, neste caso, teremos:

$$D^*(s)\Big|_{fila1ocupada} = B^*(s)$$

Por outro lado, se a fila 1 está vazia até a partida do primeiro cliente, deve-se esperar pela soma de dois intervalos, sendo o primeiro o tempo até que o segundo cliente chegue e o próximo sendo o tempo de atendimento (ou tempo de serviço) do segundo cliente; como estes dois intervalos são independentemente distribuídos, então a *fdp* da soma deve ser a convolução das *fdp*’s de cada intervalo. Certamente, a transformada da soma das fdp’s será o produto das transformadas das fdp’s individuais, então, tem-se:

$$D^*(s)\Big|_{fila1vazia} = A^*(s)B^*(s),$$

onde:

$A^*(s)$ – tempo até a primeira chegada
$B^*(s)$ – tempo do próximo serviço

Sabe-se que

$$D^*(s) = \rho B^*(s) + (1-\rho) A^*(s) B^*(s),$$

se a chegada obedece a um processo de Poisson, a distribuição do tempo entre chegadas é exponencial com taxa l. Portanto, $A^*(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s}$. Da mesma forma, como o servidor é exponencial com taxa μ, então, pode-se escrever $B^*(s) = \dfrac{\mu}{\mu + s}$.

Substituindo-se $A^*(s)$ e $B^*(s)$ na equação de $D^*(s)$, tem-se:

$$D^*(s) = \rho\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right) + (1-\rho)\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)$$

Como $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, tem-se:

$$D^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s}\left[\frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)\right]$$

$$D^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

Pode-se perceber que as partidas de um sistema M|M|1 em equilíbrio só dependem das chegadas.

2.4.4.1. IMPLICAÇÕES DO TEOREMA DE BURKE

Desde que as chegadas nos estados que caminham “para frente” formam um processo de Poisson, as saídas nos estados que caminham “para trás” também formam um processo de Poisson.

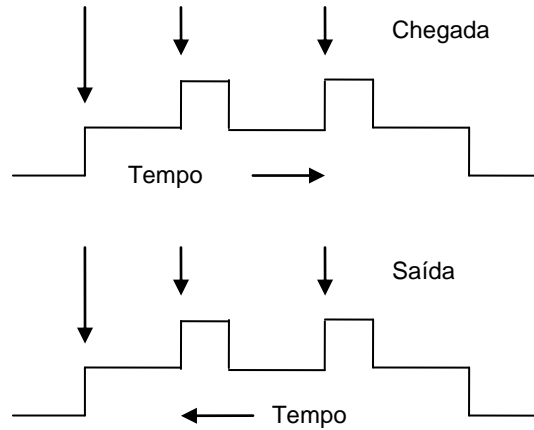



Figura 2.14 – Implicações do Teorema de Burke

Uma vez que o processo “para trás” é estatisticamente o mesmo que o processo para frente, o processo de saída é Poisson.

Pelo mesmo argumento, o estado deixado por um cliente é independente das saídas anteriores.

2.4.5. FORMA PRODUTO NA REDE ABERTA

Um teorema importante, provado por Jackson, afirma que a distribuição estacionária do número de usuários presentes no sistema pode ser calculada pelo produto de distribuições estacionárias marginais (referentes a cada centro). O resultado obtido, também chamado de **solução na forma produto**, indica que o sistema se comporta como se cada centro de serviço $i \in$ J fosse uma fila com chegadas e serviços exponenciais com taxas γ_i e $\mu_i(n_i)$, respectivamente, independente dos demais centros. Assim, no caso de S servidores idênticos, teríamos o sistema comportando-se como se fosse uma coleção independente de filas M|M|S.

No entanto é importante observar que nem sempre as chegadas internas forma um processo de Poisson. Portanto, a **forma produto** deve ser aplicada com cuidado. A vantagem da forma produto é, entre outras, a possibilidade de identificação rápida dos efeitos da mudança dos parâmetros de uma estação sobre o desempenho de toda a rede.

Para utilização como constantes normalizadoras a seguir define-se:

$$b_i^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_i^n}{[\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(n)]},$$

onde o termo correspondente a n = 0 é igual a 1.

Sob a condição de $b_i^{-1} < \infty \quad ,\forall i \in J$, o processo N te distribuição estacionária dada por:

$$\pi_i(\overline{n}) = \prod_{i=1}^{J} \pi_i(n_i) = \prod \rho_i^{n_i}(1-\rho_i);$$

com $\overline{n} = (n_1, n_2, n_3, ..., n_J)$, $\pi_i(n_i) = \dfrac{b_i \gamma_i^{n_i}}{[\mu_i(1)\mu_i(2)...\mu_i(n_i)]}$, $\quad i \in J$ e $\rho_i = \dfrac{\gamma_i}{\mu_i}$.

Sendo assim, considere a rede de filas aberta mostrada na Figura 2.15.

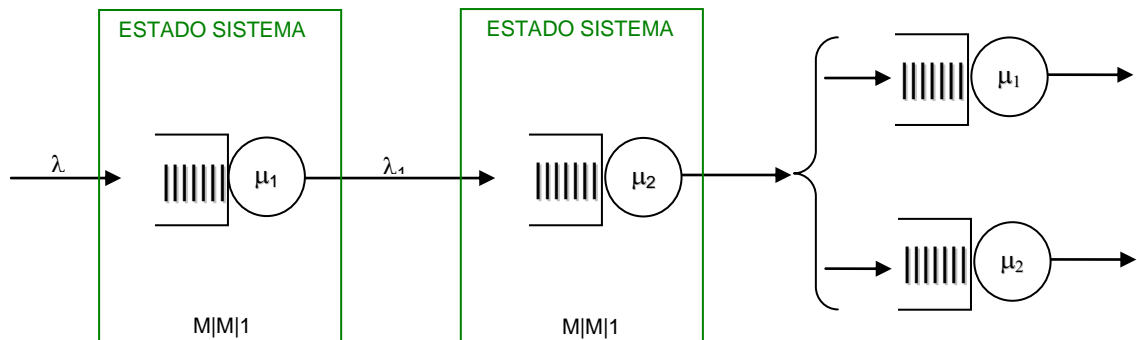



Figura 2.15 – Forma Produto Rede Aberta

Pela forma produto tem-se:

$$P[(K_1, K_2)] = P_1[K_1]P_2[K_2]$$

$$P[(K_1, K_2)] = ((1-\rho_1)\rho_1^{K_1})((1-\rho_2)\rho_2^{K_2}),$$

onde $\quad \rho_i = \dfrac{\gamma_i}{\mu_i} < 1, \quad i = \{1,2\}$.

Considere ainda a rede de filas aberta sem realimentação mostrada na Figura 2.16.

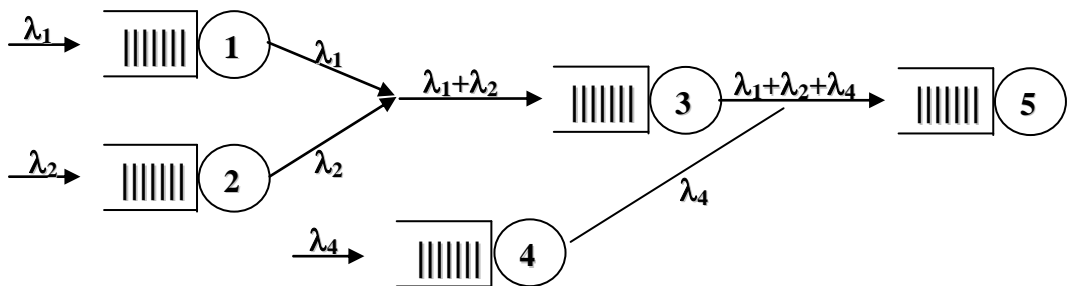



Figura 2.16 – Rede aberta sem realimentação

Sejam N_1, N_2, N_3, N_4 e N_5, os estados em cada nó do sistema (1, 2, 3, 4, 5), então a distribuição de probabilidade conjunta pode ser dada pela equação abaixo:

$$P[N_1, N_2, N_3, N_4, N_5] = P_1[N_1]P_2[N_2]P_3[N_3]P_4[N_4]P_5[N_5]$$

2.4.5.1. FORMA PRODUTO NA REDE FECHADA

Seja o processo N com distribuição estacionária dada por:

$$\pi(\bar{n}) = b_M \prod_{i=1}^{J} \frac{\gamma_i^{n_i}}{[\mu_i(1)\mu_i(2)...\mu_i(n_i)]},$$

para $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3, ..., n_J)$, $\sum_{i=1}^{J} n_i = M$ e b_M a constante de normalização.

No caso de sistemas fechados, a constante de normalização não é fatorável num produto de constantes associadas a cada estação. Assim, não se tem independência entre o número de clientes em cada estação para cada *t* fixado.

2.5. A FILA M|G|1

A fila M|G|1 consiste de um sistema de servidor simples, com chegadas Poisson, distribuição do tempo de serviço arbitrária, denotada por B(x) e função de distribuição de probabilidade do tempo de serviço denotada por b(x). A distribuição do tempo entre chegadas é dada por:

$A(t) = 1 – e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$
$a(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

com a taxa média de chegada de clientes por segundo igual a λ, um tempo médio entre chegadas de $1/\lambda$ segundos e variância (σ^2) igual a $1/\lambda^2$.

- **História passada sumarizada:**

N(t) - nº. de fregueses no sistema no instante t
$X_o(t)$ - tempo de serviço já recebido pelo freguês em serviço no instante t

As definições acima são necessárias uma vez que a distribuição do tempo de serviço não é necessariamente “sem memória”. Neste caso, verifica-se que o processo aleatório N(t) não é um processo Markoviano. Entretanto, o vetor [N(t), $X_0(t)$] é um processo de Markov e é um vetor de estado apropriado para o sistema M|G|1, uma vez que ele sumariza toda a história passada.

$\underbrace{[\,N(t)\,,\,X_o(t)\,]}_{\text{Cadeia de Markov}}$ → Sumariza o passado

Analisando o sistema nos instantes de partida:
$x_o(t) = 0$

- **Cadeia de Markov embutida nos instantes de partida:**

$\Pi^a = \Pi^d = \Pi$ Igualdade entre distribuições estacionárias

No modelo M|G|1 vale a igualdade entre as distribuições estacionárias em tempo contínuo e as imersas nos instantes de chegadas e partidas.

Para obtermos
- Distribuição do nº. de clientes no sistema
- Distribuição do tempo de espera
- Distribuição do tempo ocupado

- **Chegadas Poisson:**

$P[N(t) = k]$ - Probabilidade de um cliente que chegue no instante t encontre K clientes no sistema

$P[N(t) = k] = P_k^a(t)$

Para sistemas cuja alteração de estado se de por acréscimo de +/- 1 cliente:

$P_k^a(t) = P_k^d(t)$ - Isto é, o número de clientes encontrado na chegada é igual ao nº. de clientes deixados por uma saída.

- **Probabilidade de Transição da Cadeia de Markov:**

Sejam:
q_n = nº. de clientes deixados no sistema pela partida de C_n
V_n = nº. de clientes que chegaram durante a execução do serviço de C_n (que tem duração X_n)

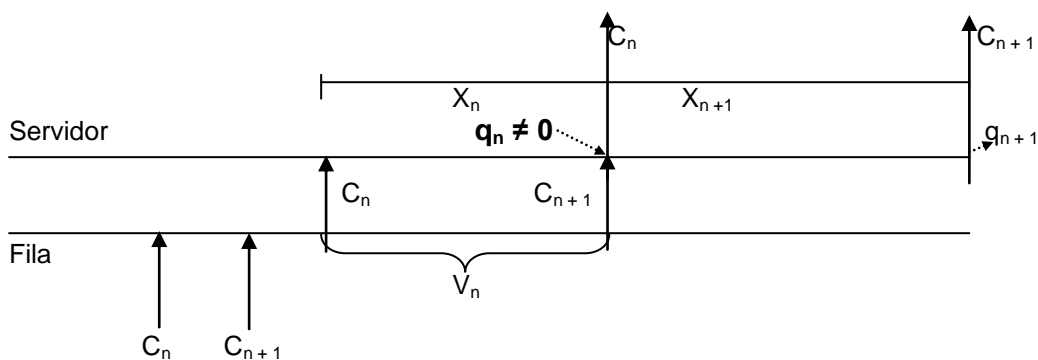



Figura 2.17 – Probabilidade de Transição da Cadeia de Markov (1)

$$P_{ij} = P[q_{n+1} = j | q_n = i]$$

Dado que $q_{n+1} < q_{n-1}$ é impossível,

$$q_{n+1} \geq q_{n-1}$$

$$\Lambda.P = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

Onde: $\alpha_k = P[V_{n+1} = k]$

V_n depende da duração de X_n (e não de n) em regime estacionário.

$$P[X_n \leq X] = P[\tilde{x} \leq X] = B(x)$$
$$P[v_n = k] = P[\tilde{v} = k] = \alpha_k$$

$$P[\tilde{v} = k] = \alpha_k = \int_0^\infty P[\tilde{v} = k; x < \tilde{x} < x + dx]dx = \int_0^\infty P[\tilde{v} = k | \tilde{x} = x]b(x)dx$$

Para chegadas Poisson:

$$P[\tilde{v} = k] = \alpha_k = \int_0^\infty \left[\frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} b(x) \right] dx$$

Sejam $\rho = \bar{\lambda}.\bar{x}$ e $\rho < 1$ (condição de ergodicidade)

Equação fundamental da M|G|1

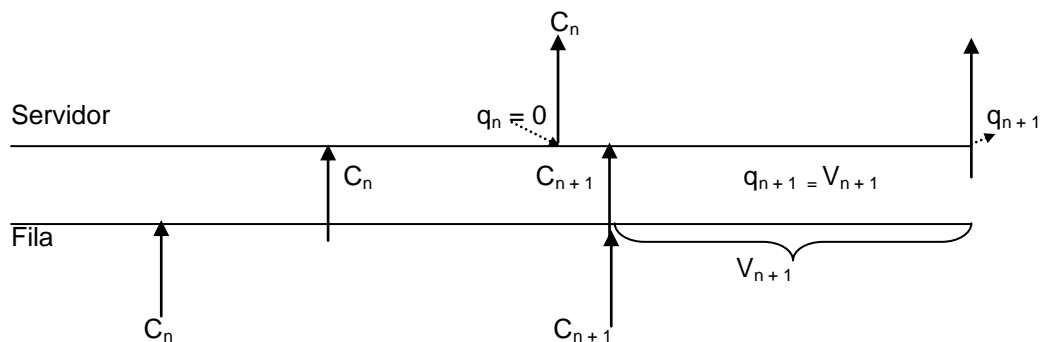



Figura 2.18 – Probabilidade de Transição da Cadeia de Markov (2)

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + v_{n+1} \; se \quad q_n > 0 \\ v_{n+1} \quad se \quad q_n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta q_n = \begin{cases} 1 \quad se \quad q_n > 0 \\ 0 \quad se \quad q_n = 0 \end{cases}$$

$q_{n+1} = q_n - \Delta q_n + v_{n+1}$ $\rightarrow$ Equação fundamental da M|G|1

2.5.1. MEDIDAS DE DESEMPENHO

Nesta seção,serão apresentadas algumas medidas de desempenho para o modelo M|G|1. Inicialmente, notamos que as fórmulas de Little continuam válidas e as utilizaremos para deduzir alguns resultados.

- **Número médio de clientes no sistema (em regime estacionário):**

O valor esperado do número de usuários no sistema (L), nos instantes imediatamente após uma partida, pode ser calculado conforme demonstrado a seguir.

$$\tilde{q} = \lim_{n\to\infty} q_n \quad \rightarrow \quad E[q] = \lim_{n\to\infty} E[q_n]$$

Usando a equação fundamental:

$$\lim_{n\to\infty} E[q_{n+1}] = \lim_{n\to\infty} E[q_n - \Delta q_n] + \lim_{n\to\infty} E[v_{n+1}]$$

$$E[\tilde{q}] = E[q] - E[\Delta q] + E[\tilde{v}]$$

$$E[\tilde{v}] = E[\Delta q]$$

Como:

$$E[\tilde{v}] = \lambda.\bar{x} \, ,$$

$$E[\Delta q] = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k P[\tilde{q} = k] = \Delta_0 P[q = 0] + \Delta_1 P[q = 1] + \Delta_2 P[q = 2] + \cdots$$

$E[\Delta q] = \sum_{k=1}^{\infty} P[\tilde{q} = k]$ $\rightarrow$ Probabilidade sistema ocupado = ρ

$$\lambda.\bar{x} = \rho = 1 - p_0$$

Comprimento médio do sistema: $L = E[\tilde{q}] = \rho + \frac{E[\tilde{v}^2] - E[\tilde{v}]}{2(1-\rho)}$

Sabe-se que para chegadas Poisson: $P[N=k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

Poisson (λ) → $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P[v=k] z^k$

$$V(z|serviço = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} z^k$$

$$V(z|serviço = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda xz)^k}{k!} = e^{-\lambda x}.e^{\lambda xz}$$

$$V(z|serviço = x) = e^{-\lambda x(1-z)}$$

Chegada e serviço independentes:

$$V(z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x(1-z)} b(x) dx$$

Da definição da transformada de LaPlace:

$$B^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-bx} b(x) dz$$

Então:

$$B^*(s) = B^*(\lambda - \lambda z)$$

Sabe-se que:

$$\frac{dV(z)}{dz}\Big|_{z=1} = E[v] \qquad \frac{d^2V(z)}{dz^2}\Big|_{z=1} = E[v^2] - E[v]$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\lambda \frac{d}{dz}\left[B^*(\lambda - \lambda z)\right] \qquad \frac{d^2V(z)}{dz} = u''(z) = \lambda^2 \frac{d^2}{dz^2}\left[B^*(\lambda - \lambda z)\right]$$

Para z=1:

$$V''(1) = \lambda^2 B^*(0) = \lambda^2 \overline{x^2}$$

$$B^{*'}(s) = -\overline{x}$$

$$B^{*\cdot}(s) = \overline{x}^2$$

$$E[v^2] - E[v] = \lambda^2.\overline{x}^2$$

L = nº. médio de clientes no sistema

$$L = E[q] = \rho + \frac{\lambda^2 x^{-2}}{2(1-\rho)}$$

Sabe-se que a variância do tempo de serviço é $\sigma_b^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$. Então:

$$L = \rho + \frac{\lambda^2\sigma_b^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \quad \rightarrow$$ Fórmula de Pollaczek-Khintchine

$$L = \rho + L_q$$

L_q = nº. médio de clientes na fila

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma_b^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

Usando a fórmula de Little temos as expressões para a média do tempo de permanência no sistema (W) e para a media do tempo de permanência na fila (W_q):

$$W = \frac{L}{\lambda} = \overline{x} + \frac{1}{\lambda}.\left[\frac{\lambda^2\sigma_b^2 + \rho^2}{2.(1-\rho)}\right]$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.\left[\frac{\lambda^2\sigma_b^2 + \rho^2}{2.(1-\rho)}\right]$$

Exemplos:

1) M/M/1

$\sigma_b^2 = \frac{1}{\mu^2}$ e $L_q = \frac{2.\rho^2}{2(1-\rho)}$

2) M/D/1

$\sigma_b^2 = 0$ e $L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$

Outra forma de obtermos a média do tempo de permanência no sistema e na fila, W e W_q, respectivamente:

Considere a
Figura 2.18, abaixo.

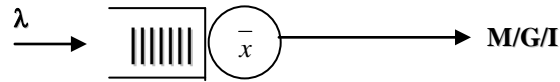



Figura 2.18 – Modelo M/G/I

L = λ.W

L_q = λ.W_q

$W_q = L_q \cdot \bar{x} + \rho \cdot T_{VR}$ (Tempo de vida residual do cliente no atendimento)

$$T_{VR} = \frac{\overline{x^2}}{2\bar{x}}$$

Para o caso específico da Exp (μ): $T_{VR} = \left(\dfrac{\frac{2}{\mu^2}}{\frac{2}{\mu}} \right) = \dfrac{1}{\mu}$

- **Distribuição do nº. de clientes no sistema (P_n):**

$$\lim_{n->00} Q_n(z) = E[z^q] = Q(z)$$

$$Q(z) = \frac{B^*(\lambda - \lambda z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}(1-\rho).(1-z)$$

(Eq. Transformada de P.K. para M|G|1)

Para o caso M|M|1:

$$b(x) = \mu e^{-\mu x}$$

$$B^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$B^*(\lambda - \lambda z) = \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu}$$

$$Q(z) = \sum Z^k.P[q = k]$$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n$$

- **M|G|1 → Distribuição do tempo de espera:**

$$S^*(s) = \frac{B^*(s).(1-\rho).s}{\lambda.B^*(s)+s-\lambda}$$

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho).s}{\lambda.B^*(s)+s-\lambda}$$

Para M|M|1:

$$B^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$S(x) = \xi(\mu-\lambda)$$

- **Distribuição do período ocupado:**

$\mu(t)$ = serviço não terminado no sistema no tempo t, ou
$\mu(t)$ = tempo necessário para esvaziar o sistema de todos os clientes presentes no instante t

Servidor conservativo: sistema permanece ocupado enquanto houver cliente no sistema e os clientes só partem do sistema quando o mesmo estiver completamente servido.

Para sistema conservativo: $\mu(t)$ é independente da disciplina do serviço.

F(y): distribuição do período ocioso
G(y): distribuição do período ocupado

M|G|1 → F(y) = 1 – $e^{-\lambda x}$ (tempo de chegada exponencial)

G*(s) → TC período ocupado

G*(s) = B*[s + λ – λ.G*(s)]

2.6. *Anexo*

2.6.1. FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS

Nesta seção será introduzido um importante conceito matemático que possui muitas aplicações aos modelos probabilísticos. Para um desenvolvimento rigoroso do assunto seria necessário um conhecimento matemático de nível bem mais elevado do que se propõe nesta apostila. No entanto, se evitarmos certas dificuldades matemáticas que surgem e aceitarmos que determinadas operações sejam válidas, poderemos alcançar uma compreensão suficiente das principais idéias abrangidas, a fim de empregá-las inteligentemente.

Suponhamos que X seja uma variável aleatória, isto é, X é uma função do espaço amostral para os números reais. Ao calcularmos várias características da variável aleatória X, tais como E(X) ou V(X), trabalhamos diretamente com a distribuição de probabilidade de X.

Definição. Seja X, uma variável aleatória discreta, com distribuição de probabilidade p(xi) = P(X = xi), i = 1,2,3....A função Mx, denominada função geratriz de momentos de X, é definida por:

$$Mx(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} p(x_j)$$

Se X for uma variável aleatória contínua com fdp f, definiremos a função geratriz de momentos por:

$$Mx(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

Em qualquer dos casos, o discreto ou o contínuo, Mx(t) é apenas o valor esperado de e^{tx}. Por isso, podemos combinar as expressões acima e escrever:

$$Mx(t) = E(e^{tx}).$$

A seguir, serão mostrados alguns exemplos de funções geratrizes de momentos.

Exemplo I - Suponha que X seja uniformemente distribuída sobre o intervalo [a,b]. Logo, a **fgm** será dada por:

$$Mx(t) = \int_a^b \tfrac{e^{tx}}{a-b} dx$$
$$= \tfrac{1}{(b-a)t}[e^{bt} - e^{at}], t \neq 0$$

Exemplo II – Suponha que X seja binomialmente distribuída, com parâmetros n e p. Neste caso,

$$Mx(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{K} pk(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{t})^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$[pe^{t} + (1-p)]^{n}.$$

A última igualdade decorre de uma aplicação direta do teorema binomial

Exemplo III - Suponha que X tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro λ. Por conseguinte,

$$Mx(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(\lambda e^{t})^{k}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{t}} = e^{\lambda(e^{t}-1)}$$

A terceira igualdade decorre do desenvolvimento de et, em $\sum_{n=0}^{\infty} (y^{n}/n!)$. Esta foi empregada com y = λet

Exemplo IV -. Suponha que X tenha uma distribuição exponencial, com parâmetro α. Logo,

$$Mx(t) = \int_{0}^{\infty} e^{tx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_{0}^{\infty} e^{x(t-\alpha)} dx.$$

Esta integral converge somente se t < α. Por isso, a fgm existe somente para estes valores de t.

Admitido que essa condição seja satisfeita temos:

$$Mx(t) = \tfrac{\alpha}{\alpha - t} e^{x(t-\alpha)} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \tfrac{\alpha}{\alpha - t}, t < \alpha.$$

Visto que a fgm é apenas um valor esperado de X, podemos obter a fgm de uma função de uma variável aleatória sem primeiro obtermos sua distribuição de probabilidade. Por exemplo, se X tiver distribuição N(0,1) e desejarmos achar a fgm de $Y = X^2$, podemos prosseguir sem obtermos a fgm de Y, bastando para isso escrevermos:

$$My(t) = E(e^{ty}) = E(e^{tX^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp.(tx^2 - x^2/2)dx = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

2.6.2. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS

Recordemos o desenvolvimento da função e^x em série de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Sabe-se que esta série converge para todos os valores de x. Por isso,

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + ... + \frac{(tx)^n}{n!} + ...$$

Em seguida,

$$Mx(t) = E(e^{tx}) = E(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + ... + \frac{(tx)^n}{n!} + ...)$$

Para uma soma finita, o valor esperado da soma é igual à soma dos valores esperados. No entanto, estamos tratando acima com uma série infinita e por isso não pode, de imediato, aplicar tal resultado. Verifica-se, contudo, que sob condições bastante gerais, esta operação ainda é válida. Admitido que as condições exigidas sejam satisfeitas.

Como t é uma constante, tomando os valores esperados, podemos escrever:

$$Mx(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + ... + \frac{t^nE(X^n)}{n!} + ...$$

Já que Mx é uma função de variável real t, podemos tomar a derivada de Mx(t) em relação a t, isto é, M´(t):

$$M'(t) = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2E(X^3)}{2!} + ... + \frac{t^{n-1}E(X^n)}{(n-1)!} + ...,$$

e fazendo t = 0, verifica-se que somente o primeiro termo permanece, e teremos:

$$M'(0) = E(X)$$

Portanto, a derivada primeira da **fgm**, calculada para t = 0, fornece o valor esperado da variável aleatória. Se calcularmos a derivada segunda de Mx(t), obteremos:

$$M''(t) = E(X^2) + tE(X^3) + ... \frac{t^{n-2}E(X^n)}{(n-2)!} + ...,$$

e fazendo t = 0, teremos:

$$M''(0) = E(X^2).$$

Admitido que M(n)(0) exista, e continuando dessa maneira, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 1

$$M^{(n)}(0) = E(X^n).$$

Isto é, a derivada n-ésima de Mx(t), avaliada para t = 0, fornece E(Xn).

Exemplo V - Suponha que X tenha uma distribuição binomial com parâmetros n e p. Conseqüentemente, Mx(t) = [pet + q]n. Por isso,

$$Mx(t) = \int_0^\infty e^{tx}\alpha e^{-\alpha x}dx = \alpha\int_0^\infty e^{x(t-\alpha)}dx.$$

Logo, $E(X) = M'(0) = np$, o que concorda com nosso resultado anterior. Além disto, $E(X2) = M''(0) = np[(n-1)p+1]$. Daí, $V(X) = M''(0) - [M'(0)]2 = np(1-p)$.

Os dois teoremas seguintes serão de notável importância em nossa aplicação da **fgm**.

Teorema 2

Suponha que a variável aleatória X tenha **fgm** Mx. Seja Y = αX + β. Então, My, a **fgm** da variável Y, será dada por:

$$My(t) = e^{\beta t}Mx(\alpha t).$$

Teorema 3

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com **fgm** e Mx(t) e My(t), respectivamente. Se Mx(t) = My(t) para todos os valores de t, então X e Y terão a mesma distribuição de probabilidade.

Propriedade Reprodutiva

Se duas (ou mais) variáveis aleatórias que tenham uma determinada distribuição forem adicionadas, a variável aleatória resultante terá uma distribuição do mesmo tipo que aquelas das parcelas. Esta propriedade é denominada Propriedade Reprodutiva (ou aditiva).

Exemplo VI - Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com distribuições $N(\mu_1, \sigma_1^2.)$ e $N(\mu_2, \sigma_2^2.)$, respectivamente. Façamos Z=X+Y.

Conseqüentemente,

$$\mathrm{Mz(t)} = \mathrm{Mx(t)My(t)} = \exp.(\mu_1 t + \sigma_1^2 \, t^2/2)\exp.(\mu_2 t + \sigma_2^2 \, t^2/2)$$
$$= \exp.[(\mu_1 + \mu_2)t + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\, t^2/2]$$

Isto representa a **fgm** de uma variável aleatória normalmente distribuída, com valor esperado $\mu_1 + \mu_2$ e variância $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Portanto, Z terá uma distribuição normal. (Ver Teorema 3)

Teorema 4

Sejam $X_1,...,X_n$ variáveis aleatórias independentes. Suponha que X_i tenha distribuição de Poisson com parâmetro $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Teorema 5

Suponha que a distribuição de X_i, ..., X_k sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição N(0,1). Então, $S = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_k^2$ terá distribuição de X_k^2.

Teorema 6

Seja $Z=X_1 + ...X_r$, onde X_i são r variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada uma com distribuição exponencial, de mesmo parâmetro α e r. Então, Z terá uma distribuição gama, com parâmetro α e r.

Considerações Finais

A **fgm** constitui um poderoso instrumento muito poderoso para estudo de vários aspectos das distribuições de probabilidades. O emprego é muito útil no estudo de somas de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e na obtenção de várias regras aditivas.

2.6.3. TRANSFORMADA Z

Esta seção tem a finalidade de resumir alguns conceitos de Transformada Z, necessários aos estudos de Teoria das filas.

A transformada Z desempenha, para processos discretos, o mesmo papel que a transformada de Laplace em processos contínuos.

A transformada Z de uma seqüência em tempo discreto F[n] é definida por:

$$F(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) Z^{-n} \qquad\qquad F(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n Z^{n}$$

A transformada pode ser unilateral e, desta forma, “transforma-se” em:

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) Z^{-n} \qquad\qquad F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n Z^{n}$$

Esta transformada se chama unilateral e o primeiro caso é chamada de transformada Z bilateral.

Vejamos alguns exemplos.

a) *Exemplo 1*

Encontre a transformada Z, $F(Z)$, para $F(n)$ = δ(n)

Solução:

Define-se: $\delta(n) = \begin{cases} 1, & se \quad n = 0 \\ 0, & se \quad n \neq 0 \end{cases}$, pela definição da transformada Z, tem-se:

$$F(Z) = 1 \times Z^{0} = 1$$

b) *Exemplo 2*

Seja $F(t) = \ell^{-at} U(t)$ e seja $F(n)$ a seqüência obtida ao amostrar-se $F(t)$ a cada T segundos. Encontre $F(Z)$.

Solução:

Neste caso, $F(n) = \ell^{-anT} U(n)$, conseqüentemente,

$$F(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell^{-anT} F(n) Z^{-n} \qquad\qquad F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\ell^{-aT} Z^{-1}\right)^{n} .$$

Sabendo que:

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^{k} = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a},$$

Tem-se:

$$F(Z) = \lim_{n_2 \to \infty} \frac{\left(\ell^{-aT} Z^{-1}\right)^{0} - \left(\ell^{at} Z\right)^{-n_2+1}}{1 - \ell^{-aT} Z^{-1}}$$

$$F(Z) = \frac{1}{1 - \ell^{-aT} Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - \ell^{-aT}} .$$

Se o período de amostra é T=1, então: $F(Z)=\dfrac{Z}{Z-\ell^{-a}}$.

Assim, pode-se resumir a definição de transformada Z da seguinte forma:

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n Z^n \qquad (Z)<1 \quad \begin{cases} \text{Propriedade importante} \\ \text{unidade} \\ \text{linearidade} \\ \text{inuariancia (no tempo)} \\ \text{convolução} \end{cases}$$

logo $F(1)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$ Obs.: função densidade de probabilidade atende a esta condição

$X \rightarrow$ variável aleatória discerta

$$f_K = P[x=K] \qquad P[x \leq K]=\sum_{n=0}^{K} f_K$$

logo $F(Z)=E(X^K) \Rightarrow K^0$momento de X

$$\sum_K Z^K f_K$$

logo $F(1)=\sum_K f_K = 1$

$$F(1)=\sum_K K.Z^{K-1} f_K = \sum K\ f_K = \overline{X}$$

$$F^{(2)}(1)=F(1)=\sum_K K(K-1)Z^{(K-Z)} f_K = \sum_K (K^2-K) f_K = \sum_K K^2 f_K - \sum_K K\ f_K = \overline{X^2}-\overline{X}$$

Na Tabela 2.3 encontram-se as transformadas Z das principais seqüências discretas.

Tabela 2.3 – Transformada Z principais seqüências discretas

X[n] com *n* ≥ *0*	**X[Z]**	**Raio de Convergência |Z| > R**
δ[n]	1	0
$\delta[n-m]$	Z^{-m}	0
U[n]	$\dfrac{z}{z-1}$	1
N	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	1
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$	|a|

na^n	$\frac{aZ}{(Z-a)^2}$	$\|a\|$
$(n+1)a^n$	$\frac{Z^2}{(Z-a)^2}$	$\|a\|$
$Cos\,\Omega_0 n$	$\frac{Z\,(Z-Cos\,\Omega_0 n)}{Z^2-2ZCos\,\Omega_0 n+1}$	1
$Sen\,\Omega_0 n$	$\frac{Z\,Sen\,\Omega_0 n}{Z^2-2ZCos\,\Omega_0 n+1}$	1
ℓ^{-anT}	$\frac{Z}{Z-\ell^{-aT}}$	ℓ^{-aT}

A Transformada Z inversa

Para que a transformada Z seja útil, é aconselhável estar familiarizado com os métodos para encontrar a transformada Z inversa.

A notação para a transformada Z inversa será Z^{-1}. A transformada Z inversa de X[Z] dá como resultado a correspondente seqüência X[n].

Existem quatro métodos para obtermos a transformada inversa:

- ⇨ Método da Divisão Direta;
- ⇨ Método Computacional;
- ⇨ Método de expansão em frações parciais;
- ⇨ Método da Integral de inversão.

O método da divisão direta provém do fato de que se X[Z] está expandida em uma série de potências de Z^{-1}, isto é, se

$$X[z]=\sum_{n=0}^{\infty} X[n]\,z^{-n}$$
,

então, X[n] é o coeficiente de (Z^{-k} y), por conseguinte, os valores de X[n] podem ser encontrados por inspeção para n = 0, 1, 2,...

c) *Exemplo 3*

Ache X[n] para n = 0, 1, 2, 3, 4, quando:

$$X[z]=\frac{10Z+5}{(Z-1)(Z-0.2)}$$

Solução:

Dividindo o numerador pelo denominador obtém-se:

$$X[Z] = 10Z^{-1} + 17Z^{-2} + 18{,}4Z^{-3} + 18{,}68Z^{-4} + \cdots$$

Ao comparar esta expansão X[Z] em uma série infinita:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X[n] Z^{-n}$$

obtém-se: X[0]=0, X[1]=10, X[2]=17, X[3]=18,4, X[4]=18,68.

Na maioria dos casos, não é tão simples identificar o término geral, mediante a observação de alguns valores da seqüência.

O método mais utilizado é a decomposição em frações parciais de X[Z]. Em vista da unicidade da transformada Z, pode-se utilizar a tabela de similaridades de transformadas para identificar as seqüências correspondentes.

d) *Exemplo 4*

Encontre a transformada inversa de:

$$X[Z] = \frac{2Z^3 + Z}{(Z-2)^2 (Z-1)}$$

através do método de expansão em frações parciais.

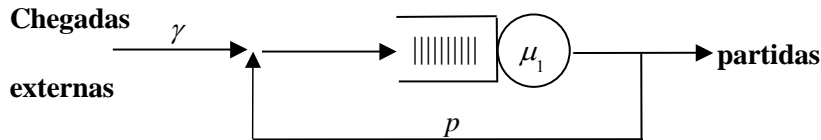
Solução:

Expandindo em frações parciais, tem-se que:

$$X[Z] = \frac{4}{(Z-2)^2} + \frac{3}{(Z-1)} - \frac{1}{(Z-2)}$$

Usando una tabela de transformadas, tem-se: $X[n]=9n2^{n-1}-2^{n}+3$ para *n = 0, 1, 2,...*

EXERCICIOS PROPOSTOS DE TEORIA DAS FILAS

1) Considere a rede de filas aberta com um único nó, como mostrada abaixo.

O nó único é uma fila M/M/1 com taxa de serviço μ. Um freguês retorna ao nó com probabilidade p depois de completar seu serviço. A disciplina da fila é PEPS (primeiro a chegar primeiro a ser servido). Pergunta-se:

(a) Quanto vale γ = taxa total de chegada ao nó 1?

(b) Qual é o intervalo permitido para variação de p para que o sistema permaneça estável?

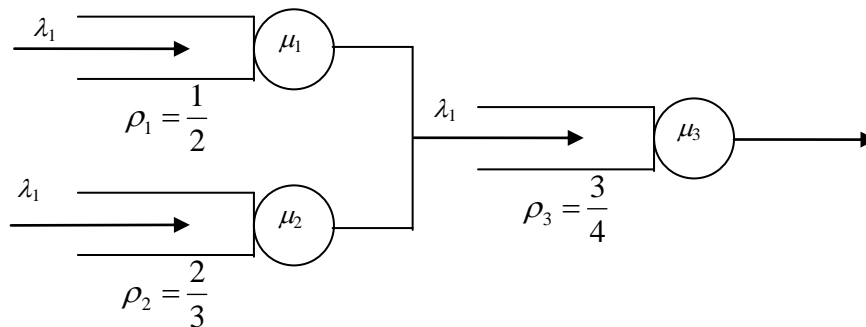
2) No bar de um aeroporto, uma pessoa pode escolher entre tomar um café servido no balcão, ou então usar uma máquina automática. No balcão só podem ser atendidos, em média, 180 pessoa por hora, enquanto a máquina pode atender exatamente 4 pessoas por minuto. A cada hora, 270 pessoas, em média, procuram o bar para tomar café; a probabilidade de uma pessoa preferir o balcão é de 0,6. Qual a demora média de uma pessoa que procura o bar, desde que entra até ser servida de café?

3) Uma frota de traineiras consome gelo para conservar o peixe durante o tempo passado no mar. O gelo vem em camionetas que transportam 1 tonelada cada (50 barras) e que, no dia da entrega, chegam à razão de 5 por hora, em média. O pessoal encarregado da descarga tira 1 barra a cada 12 segundos em média. O gelo custa $20 a tonelada e, no verão, a perda devida ao derretimento é de cerca de 1 quilo por minuto e por tonelada de gelo. Qual o custo esperado do gelo que chega a ser embarcado?

4) Seja a rede de filas abaixo, onde todos os sistemas de filas são M/M/1. Determine:

a. Qual o gargalo do sistema?
b. Qual a máxima taxa de chegadas externas admissível?
c. Qual o número esperado de clientes em todo o sistema para uma taxa de chegadas externas igual a 75% da taxa calculada em (b)?
d. Suponha que a taxa calculada em (b) tenha sido ultrapassada, qual o novo gargalo do sistema?
e. Se os sistemas de filas fossem M/G/1, o que mudaria nas respostas anteriores (a) até (d)?

Dados: $\mu_1 = \mu_2$ = 15 clientes/hora, μ_3 = 20 clientes/hora, μ_4 = 25 clientes/hora.

5) Seja a rede de filas markovianas esquematizada abaixo.

Se $\lambda 1$ = 10 clientes/hora, λ_2 = 20 clientes/hora, μ_1 = 20 clientes/hora, μ_2 = 30 clientes/hora, μ_3 = 40 clientes/hora.

a. Determine o gargalo do sistema (isto é, a pior fila).
b. Qual a probabilidade de todo o sistema estar ocioso?
c. Qual a probabilidade de existir uma única pessoa no sistema?

6) Em um laboratório de computação gráfica da universidade existem 4 estações de trabalho, cada uma delas com um tempo entre falhas exponencialmente distribuído com média de 40 dias. O laboratório tem um contrato com o fornecedor, que permite que até duas das estações sejam reparadas simultaneamente, quando da ocorrência de defeitos. O tempo de reparo de cada estação pode ser considerado exponencialmente distribuído com duração média de 10 dias. Desenvolva um modelo de filas para representar o problema e obtenha:

a. o diagrama de transição de estados.
b. as equações de equilíbrio e de recorrência.
c. o número médio de estações em operação normal.
d. a percentagem do tempo em que todas as estações estão paradas.

7) Estão sendo feitos planos para a abertura de um posto de lavagem de carros pequeno, e tem que ser decidido quanto espaço para carros a espera. É estimado que os clientes chegariam aleatoriamente (i.e. segundo um processo de chegadas Poisson), com uma taxa média de um a cada 4 minutos, a menos que a área de carros a espera esteja lotada, em cujo caso o cliente levaria seu carro a outro lugar. O tempo que pode ser atribuído à lavagem de um carro tem uma distribuição exponencial com uma média de 3 minutos. Compare a fração de clientes potenciais que seria perdida por causa de espaço de espera inadequado se (a) zero, (b) dois ou (c) quatro espaços (não incluindo o carro que está sendo lavado) fossem previstos. (Obs.: Desenvolva a partir do diagrama de transição de estados as expressões necessárias para a solução do problema.)

8) Uma empresa de ônibus envia seus ônibus para manutenção de rotina a cada 25.000 Km. A garagem fica aberta 24 horas por dia é atendida por um único funcionário o qual é

capaz de revisar um ônibus de cada vez. O tempo que ele gasta é exponencialmente distribuído, com uma média de 4 horas. Os ônibus chegam à garagem segundo um processo de Poisson, a uma taxa média de 12 por dia. Os motoristas, entretanto, são instruídos a não entrar na garagem se lá já existirem quatro ou mais ônibus, mas retornar ao despachante para nova autorização. Determine:

a. o valor esperado de tempo que um ônibus aguarda na garagem;

b. a perda esperada de dinheiro por dia pela companhia devido à capacidade limitada da garagem, se o custo de enviar um ônibus a ela e tê-lo de volta sem revisar é $80.

9) Suponha que todos os proprietários de carros completem seus tanques quando o nível atinge exatamente a metade. Normalmente, uma média de 7,5 clientes por hora se dirigia a um posto de gasolina com uma única bomba. O tempo médio de atendimento é de 4 minutos. Com a greve dos caminhoneiros, ocorrida a pouco tempo, um certo pânico se instalou. Para modelar este fenômeno suponha que os proprietários passaram a completar o tanque quando o nível está em 3/4 do tanque. Como cada proprietário está colocando menos gasolina no tanque, durante uma visita ao posto, assuma que o tempo médio de serviço tenha caído para 3 1/2 minutos. Como o pânico afeta L e W?

10) Mecânicos que trabalham no Centro Automotivo Classe A devem retirar as ferramentas e peças que necessitam de uma ferramentaria. Uma média de 10 mecânicos por hora chegam procurando por peças. Atualmente a ferramentaria possui um ferramenteiro, que recebe $6,00 por hora e que leva em média 5 minutos para atender a cada pedido. É estimado que cada mecânico produz $10,00 de serviços por hora, cada hora que o mecânico gasta na ferramentaria custa a oficina $10,00. A oficina está analisando a possibilidade de contratar um ajudante de ferramenteiro (a $4,00 por hora). Se este ajudante for contratado o ferramenteiro terá possibilidade de atender a uma requisição em 4 minutos, em média. Assuma que os tempos entre chegadas e de serviço são exponenciais. Deve o ajudante ser contratado?

11) Modele, usando teoria de filas, um sistema em que o serviço , tomar sol na praia. Considere que as chegadas a praia seguem um processo Poisson de taxa λ, e que o tempo que cada pessoa passa na praia , aleatório, podendo ser aproximado por uma distribuição exponencial com média $1/\mu$.

a. Desenhe o diagrama de transição de estados

b. Obtenha as equações de recorrência

c. Calcule Pn (sugestão $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$).

d. Obtenha: L, Lq, W, Wq

12) Análises anteriores indicam que a chegada de clientes em uma dada agência dos correios segue uma distribuição exponencial com média de 30 chegadas por hora. Você

esta fazendo um levantamento na agência e na presente hora, já decorridos 15 min., já chegaram 10 clientes. Quantos clientes você espera que ainda cheguem na presente hora? Justifique.

13) A ocupação média de uma lanchonete de "fast-food" é de 50 pessoas. Sabe-se que chegam a lanchonete 100 pessoas/hora e que em média uma pessoa demora 20' para fazer sua refeição*.*

a. Quanto tempo demora um cliente dentro da lanchonete?

b. Qual a percentagem deste tempo é gasta na fila?

14) Um número indeterminado de duplas de alpinistas se dirige a uma montanha com o intuito de escalá-la. Na base do lance inicia da escalada há um platô onde só cabem dois alpinistas e o caminho até este platô é estreito e íngreme. Um dos guias do grupo esta na entrada deste caminho, orientando a subida para o platô. De lá ele não pode ver nem ouvir o que se passa em cima; mas baseado na experiência, procura evitar que mais de uma dupla esteja esperando na base do lance, dada a falta de espaço. Ele sabe que o lance consome, em média 12 minutos de cada dupla; se ela deseja que o platô fique sem superlotação em 84% dos casos, quantos alpinistas ele deve encaminhar em média, por hora, para lá?

15) Um reator nuclear é usado para a produção de radioisótopos de uso medicinal. Um deles de meia vida particularmente curta, tem uma demanda de 3 doses por semana, em média; se uma dose for guardada por mais de 2 semanas em média, ela se tornará fraca demais para ser usada.

a. Qual será a produção anual esperada, nestas circunstâncias?

b. Qual será o valor esperado do número de unidades em estoque?

16) Uma agência de caderneta de poupança tem k guichês, cada um dos quais pode atender, em média, a 180 pessoas por hora. Em um certo dia, a demanda média pelos serviços da agência é de 440 pessoas por hora. Os guichês estão dispostos em uma linha perpendicular à entrada; isto faz com que muitas pessoas entrem na primeira fila que encontram; sem procurar verificar se existe ou não outra fila menor. Estima-se que a probabilidade de uma pessoa entrar na fila i é de (2/k).((k+1-i)/(k+1)). Suponha que k = 4 e responda:

(a) qual o tempo médio gasto por uma pessoa que entrou na primeira fila?

(b) qual a fração do tempo desocupado do caixa da fila 4 ?

17) A e B são duas máquinas de operação manual em uma linha de produção; as peças processadas por A saem dela à razão de 10 por hora em média e são processadas em seguida por B à razão de 12 por hora em média. Dado o espaço entre A e B, haverá

congestionamento da linha sempre que existam mais de 2 peças à espera do processamento. Qual a fração esperada do tempo de funcionamento da linha, relativa a ocorrência de congestionamento ?

18) A saída de um túnel é uma pista com 2 faixas de trânsito, em mão única; 100 metros mais adiante há um sinal luminoso que abre o trânsito a cada 20 segundos, deixando passar de cada vez 10 carros. Em um dado momento, os carros estão saindo do túnel à razão de 24 por minuto em média. Sabendo-se que cada carro ocupa 10 metros de sua faixa de trânsito, pergunta-se:

(a) Qual o tamanho médio do trecho de pista ocupado pelos carros?

(b) O sinal enguiçou e a CET colocou, provisoriamente, um agente de trânsito que abre o trânsito em média a cada 20 segundos. Qual a probabilidade que a fila invada o túnel?

19) Uma famosa vidente, acostumada a prever o futuro de políticos, tem sua agenda cheia de entrevistas marcadas à razão de uma por hora (dia de 8 horas). Ela dedica, em média, 45 minutos a cada cliente e, para suavizar a espera da clientela, manda servir café com bolinhos na sala de espera. Uma pequena questão alimentar: se cada pessoa toma uma xícara de café (100 ml) a cada meia hora, quantos litros de café deverão ser preparados em média, por dia?

20) Um mecânico de manutenção de máquinas de cópia eletrostática trabalha por contrato para a Prefeitura. Ele pode consertar, em média, 3 máquinas por dia e o contrato por ele assinado prevê que todo chamado seja atendido no mesmo dia com 90% de certeza. Qual a capacidade mensal do serviço, com este padrão de atendimento?

21) Uma loja de autopeças tem estacionamento com espaço para 10 carros. Os carros chegam segundo um processo Poisson a uma média de 10 por hora. Sabe-se também que o tempo que eles permanecem estacionados tem distribuição exponencial com média de 10 min. Determine:

a. O número médio de vagas ociosas no estacionamento?
b. A probabilidade de um carro que chegue não encontre lugar para estacionar?

Sugestão: Para valores de k grandes use $\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

22) Considere um sistema com um único atendente tendo uma distribuição de chegadas Poisson com λ = 10 c/h. Atualmente o atendente trabalha de acordo com uma distribuição exponencial com um tempo médio de serviço de 5 min. A gerência tem a sua disposição um curso de treinamento que terá como resultado uma melhora (decréscimo) na variância

do tempo de serviço, porém com um leve aumento da média. Após a execução do curso estima-se que o tempo médio de serviço aumentará para 5,5 min., porém o desvio padrão decrescerá de 5 para 4 min. Deve a gerência mandar o atendente fazer este curso?

23) K-sucata recebe uma média de 15 pedidos por dia de um certo modelo antigo de carro, do qual ela pode atender a 20 pedidos por dia. Entretanto se menos que 3 carros forem alugados, a companhia perde dinheiro da seguinte forma: se somente 2 carros são alugados a perda é de $220/dia, se somente 1 carro for alugado a perda é de $260/dia e se nenhum carro for alugado a perda é de $290/dia. As perdas são, naturalmente, compensadas pelos ganhos quando 3 ou mais carros são alugados. Considerando apenas as perdas, qual será o valor esperado do prejuízo por dia? Assuma chegadas e serviço Poisson e que não existe limitação de tamanho nem desistências da fila.

3. MOVIMENTO BROWNIANO

3.1. *PASSEIO ALEATÓRIO DISCRETO - DISCRETE TIME, DISCRETE STATE,* RANDOM WALK

O "próximo passo" de um bêbado pode ser modelado como sendo aleatório e dependente somente de onde está o pé de apoio para aquele passo (que nada mais é do que onde parou o passo anterior). Supondo claro que o chão é plano, não existem obstruções no entorno, que o cara vai estar em pé ao final do passo, que não existe nenhum bar por perto, entre outros.

Chamemos de X_0 a posição inicial do pé de apoio. *E* X_t a posição do pé de apoio no instante t.

Algumas suposições para tornar nosso modelo mais amigável:

- Todos os passos são do mesmo tamanho (=1 pdb - passo de bêbado);
- Ele está em um corredor apertado e só pode ir pra frente ou pra trás (caso bidimensional);
- A probabilidade dele ir pra frente ou pra trás é 1/2 - ele está em um chão plano e o corredor não tem fim;
- Cada passo é independe dos outros.

Com isso, temos que:

$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ onde ε_t é uma variável aleatória com a seguinte distribuição discreta:

$P(\varepsilon_t = 1) = P\{\varepsilon_t = -1\} = 1/2 \qquad \forall_t = 1, 2, ...$

$$Se\ X_0 = 0,$$

$$Então \quad X_t = \begin{cases} (-t, ..., -1, 1, ..., t) \text{ para valor impar de } t \\ (-t, ..., -2, 0, 2, ..., t) \text{ para valor par de } t \end{cases}$$

Como só existem duas opções, a distribuição de X_t é binominal.

O Gráfico 3.1 abaixo ilustra os possíveis estados do sistema.

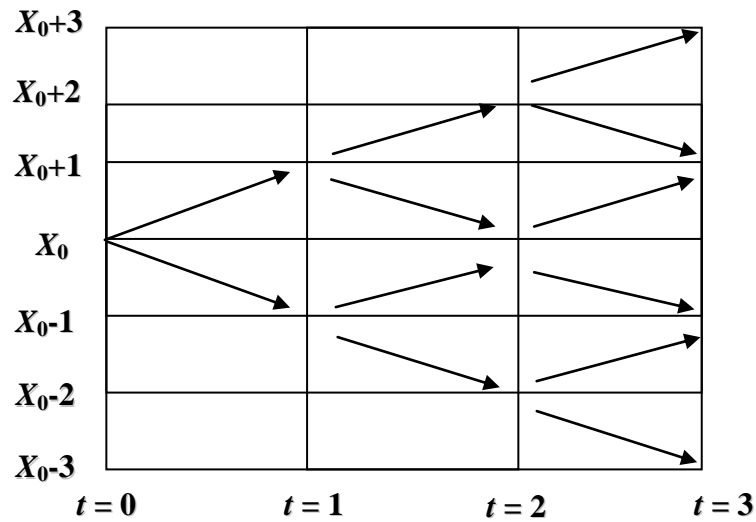



Gráfico 3.1 – Possíveis Estados do Sistema

$$\text{Depois de } t \text{ passos...} \begin{cases} n \text{ para frente} \\ t-n \text{ para trás} \end{cases}$$

Posição do bebum será

$$(t-n)(-1)+n(+1) \rightarrow 2n-t$$

$$P[X_t = 2n-t] = \binom{t}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{t-n} = \binom{t}{n}.\left(\frac{1}{2}\right)^t = \binom{t}{n}2^{-t}$$

Como o X_t varia com t, este processo é **não estacionário.**

Neste caso, se no tempo $t = 0, X_t = 0$. Então,

$$E(X_t) = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

No tempo t (com $p = 1/2$), em qualquer tempo

$$E(X_T) = X_0 \qquad \forall T > t$$

3.2. *PASSEIO ALEATÓRIO COM DESVIO - DISCRETE RANDOM WALK WITH DEVIATION*

Agora vamos imaginar o caso em que o corredor tem uma inclinação. Ou seja, é mais fácil (mais provável) que ele vá a uma direção do que outra e assumindo que o bêbado em questão consegue se equilibrar nesse corredor inclinado.

Sem perder a generalidade, imagine que a probabilidade do passo ser para frente é igual a *p e que a* probabilidade do passo ser para trás é igual a *q (=1-p).* Como já vimos,

$$P[X_t = 2n - t] = \binom{t}{n} p^n q^{t-n}$$

Neste caso, se *p > q,* no tempo t=0, $E[X_t]>0$, e é crescente com *t*! Ou seja, a medida que o tempo passa espera-se que o bêbado esteja descendo a ladeira. Examinando a expressão 2n-t, ela; e zero quando 2n=t. Ou seja, podemos entendê-la como sendo a chance de que metade dos passos seja pra frente e metade pra trás. Fica fácil de ver isso examinando um caso extremo como que essa probabilidade se comporta. Para um caso em que p=0,99 e q=0,01 vejam a chance de se andar mais para um lado que para o outro pela expressão acima.

3.3. *PASSEIO ALEATÓRIO COM TAMANHO DO PASSO VARIÁVEL* - DISCRETE TIME CONTINUOS SPACE RANDOM WALK

Reduzindo um pouco nossas suposições, suponha que não suporemos mais a suposição de que os passos são do mesmo tamanho. Pra você que viajou, só dissemos que não tem mais aquela coisa dos passos serem do mesmo tamanho. Agora a distribuição do tamanho do passo é normalmente distribuída com média 0 e desvio padrão σ.

$\varepsilon_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$

Processo Auto-regressivo à média (Processos de Reversão a média)

Podemos escrever ainda de forma mais genérica a posição do bêbado como sendo:

$$X_t = \delta + \rho\ X_{t-1} + \tau_t$$

$$\delta, \rho \rightarrow \text{constante com} \quad -1 < \rho < 1$$

$\tau_t \rightarrow$ passo normalmente distribuídos com média zero e desvio σ. Tomando o valor esperado dessa expressão temos:

$$\mathrm{E}[X_t] = E[\delta + \rho\ X_{t-1} + \tau_t]$$

$$\mathrm{E}[X_t] = E[\delta] + \rho E[X_{t-1}] + E[\tau_t]$$

$$\mathrm{E}[X_t] - \rho E[X_{t-1}] = \delta$$

Limite quando $t \rightarrow \infty$

$$E[X] = \frac{\delta}{1-\rho} \qquad \text{(Processo Estacionário)}$$

Antes de você pensar que nada mais faz sentido porque achamos uma expressão que não depende de t e ainda chamamos de processo estacionário tendo dito anteriormente que isso não aconteceria, observe que a expressão anterior era um caso particular desse

caso onde o δ era zero e o ρ era um. Nesse caso, a expressão do regime estacionário dá 0/0. Continua não existindo regime permanente para o personagem em questão.

Note se tratar de um Processo Aleatório de Tempo Contínuo com as seguintes propriedades:

(A) Propriedade de Markov (falta de memória) - valor futuro só depende do estado atual;

(B) Se realiza a incrementos Independentes - a distribuição de probabilidades de uma mudança no processo em um dado intervalo de tempo é independente de qualquer outro intervalo (sem superposição de tempo);

(C) A probabilidade de uma transição em um intervalo finito de tempo é normalmente distribuída com uma variância que aumenta linearmente com o intervalo de tempo.

Essas propriedades são algumas características de um processo de Wiener. O Processo de Wiener lembra bastante o bêbado no corredor que vimos até agora.

3.4. *PROCESSO DE WIENER*

Seja $Z(t)$ um processo de Wiener e ΔZ a mudança em Z (transição) correspondente a um intervalo de tempo Δt. A relação entre ΔZ e Δt é dada por (definição):

$$\Delta Z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

onde ε_t – é uma v.a. normalmente distribuída com média zero e desvio padrão 1.

Sendo que a variável aleatória ε_t não tem correlação serial no tempo, isto é:

$$\text{cov}(\varepsilon_t \,.\, \varepsilon_s) = 0 \qquad \forall\, t \neq s$$

Podemos dizer que ΔZ é uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e variância igual a Δt. Assim os valores de ΔZ para diferentes intervalos de tempo são independentes. Como conseqüência, $Z(t)$ é um processo de Markov (Propriedade 1) com incrementos independentes (Propriedade 2).

Analisando uma transição num intervalo de tempo T constituído de n subintervalos Δt, isto é,

$$\Delta Z = Z(s+T) - Z(s) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta_t}\text{, com } \varepsilon_i \text{ independente}$$

$$\Delta Z = \Sigma\, \varepsilon_i \sqrt{\Delta_t}$$

$$\text{logo} \quad \sigma^2_{\Delta Z} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma^2_{\varepsilon_i} .\Delta t\right) = \Delta t. \sum_{i=1}^{n} 1 = \Delta t.n = T$$

ΔZ é normalmente distribuída com média zero e variância $n.\Delta t = T$.

Isto é, a variância de uma transição no processo de Wiener cresce linearmente com o horizonte de tempo. Isso quer dizer que, quanto mais pra frente se olha o processo maior a incerteza do mesmo (Propriedade 3).

O processo de Wiener é **não estacionário**. No longo prazo sua variância tende a ser infinito. Agora vamos analisar no curtíssimo prazo, ou seja, a representação diferencial do processo de Wiener.

$$\lim_{\Delta t \to 0}$$

$$dZ = \varepsilon_i \sqrt{dt}$$

$$E[dZ] = 0$$

$$\sigma^2{}_{dZ} = E[(dZ-0)^2] = E[(dZ)^2] = dt$$

Logo o processo de Wiener não tem derivada em relação ao tempo. Isso reflete sua natureza imprevisível. A derivada é um indicador de para onde vai uma função. A resposta no caso de um processo de Wiener é "não tenho a menor idéia".

$$\frac{\Delta Z}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\Delta t}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta t} \to \infty$$

3.5. *GENERALIZAÇÃO - PROCESSO DE WIENER COM DESVIO*

$dx \to$ Normalmente distribuída com

$$dx = \alpha\, dt + \sigma\, dZ$$

$dx \to$ variação do processo x (de Weiner com desvio)
$dZ \to$ variação do processo de Weiner normal
$\alpha \to$ parâmetro do desvio (constante)
$\sigma \to$ parâmetro de variância (constante)

$$E[dx] = E[\alpha\, dt + \sigma\ dZ]$$
$$E[dx] = \alpha\, dt$$

$$\sigma_{dx}{}^{2} = E[(dx - E[dx])^2]$$
$$\sigma_{dx}{}^{2} = E[(\alpha\, dt + \sigma\ dZ - \alpha\, dt)^2]$$
$$\sigma_{dx}{}^{2} = E[(\sigma\ dZ)^2]$$
$$\sigma_{dx}{}^{2} = E[\sigma^2 \alpha^{\,2} dt]$$
$$\sigma_{dx}{}^{2} = \alpha^{\,2} dt$$

Considerando o resultado obtido vemos que o valor esperado desse processo é linear com a variação do tempo mas possui uma incerteza (variância) que varia com a raiz quadrada dessa variação de tempo.

Exemplo:

Considere o preço de uma *commodity* moderada para um Processo de Wiener em 50 anos e intervalo de tempo de 1 mês com os seguintes parâmetros:

$$\alpha = 0{,}2/\text{ano}$$
$$\sigma = 1/\text{ano}$$
$$dx = 0{,}2\frac{dt}{12} + 1{,}0\varepsilon_t\sqrt{\frac{dt}{12}}$$
$$X_t - X_{t-1} = \frac{1}{60}dt + \frac{1}{\sqrt{12}}\varepsilon_t\sqrt{dt}$$
$$X_t = X_{t-1} + \frac{1}{60} + \frac{1}{\sqrt{12}}\varepsilon_t$$

Onde ε_t ~ *N* (0,1)

Podemos simular esse processo em planilhas eletrônicas onde o próximo elemento é o primeiro somado de uma constante e um fator perturbador dado pelo ε_t.

3.6. *REPRESENTAÇÃO DO MOVIMENTO BROWNIANO POR PASSEIO ALEATÓRIO*

Seja, x um Processo de Markov com incrementos independentes. Ou seja, a probabilidade de um valor futuro de *x* depende somente de onde o processo está agora e a probabilidade de subir ou descer em cada período é independente do que acontece nos períodos prévios. Considere seu incremento como uma variável aleatória Δx que assume os valores + ou - Δh com probabilidades p e q, respectivamente. Considere sua posição inicial sendo X_0. O gráfico 3.2, abaixo, ilustra as realizações possíveis associadas as suas probabilidades em 3 tempos.

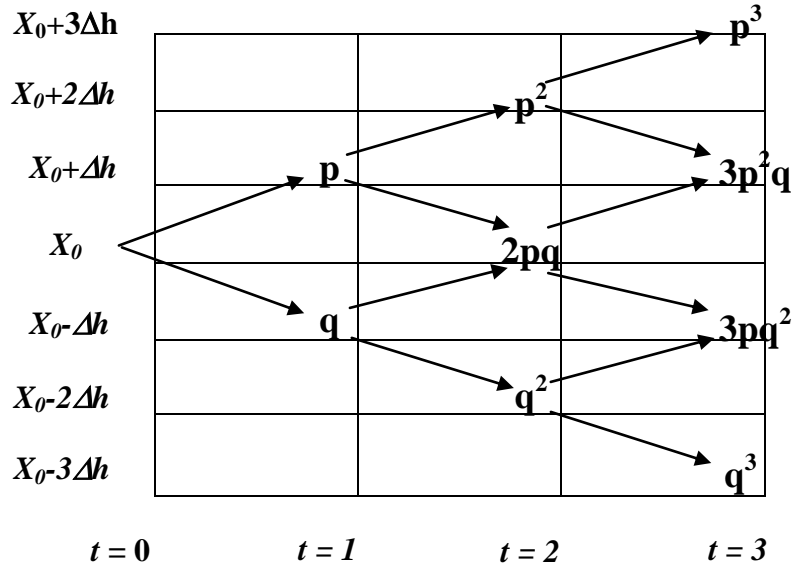



Gráfico 3.2 – Possíveis Estados do Sistema

$$E(\Delta x) = p.\Delta h + q(-\Delta h) = (p-q)\Delta h$$
$$E\left[(\Delta x)^2\right] = p(\Delta h)^2 + q(-\Delta h)^2 = (p+q)(\Delta h)^2 = (\Delta h)^2$$
$$\sigma^2(\Delta x) = E\left\{\left[\Delta x - E[\Delta x]\right]^2\right\} = E\left[(\Delta x)^2\right] - 2\Delta x E[\Delta x] + E\left[(\Delta x)^2\right] = E\left[(\Delta x)^2\right] - E[\Delta x]^2$$
$$\sigma^2(\Delta x) = \Delta h^2 - \left[(p-q)\Delta h\right]^2 = \{1-[p-q]^2\}\Delta h^2 = 4pq\Delta h^2$$

Consideremos agora que vamos dividir o tempo em n pequenos passos de tamanho Δt.

t dividido em n passos

$$\Delta t = \frac{t}{n} \text{ ou } t = n.\Delta t$$

$X_t - X_0$ tem distribuição binominal (para passos independentes)

$Considerando\ n$ passos:

$$E\left(X_t - X_0\right) = n.E\left(\Delta x\right) = n.\left(p-q\right)\Delta h = t\left(p-q\right)\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

$$\sigma^2\left(X_t - X_0\right) = n.\sigma^2\left(\Delta x\right) = n.4pq\left(\Delta h\right)^2 = 4pq\ t\frac{\left(\Delta h\right)^2}{\Delta t}$$

$$Usando,\ \ \Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}\ \Rightarrow\ \left(\Delta h\right)^2 = \sigma^2\Delta t\ \Rightarrow\ \frac{\left(\Delta h\right)^2}{\Delta t} = \sigma^2$$

$$E\left(\Delta x\right) = \alpha\,\Delta t = \left(p-q\right)\Delta h\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\left(p-q\right) = \dfrac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h = \dfrac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\\ p+q=1\end{cases}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right);\quad q = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$$

Para n passos, t finito, $\Delta t \to 0$, $n \to$ infinito

*D*istribuição binominal $\to$ nomal

com média $t\dfrac{\alpha}{\sigma^2}.\Delta h\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = t.d\overbrace{\dfrac{\left(\Delta h\right)^2}{\sigma^2\Delta t}}^{=1} = t\alpha$

com variância $4.pq.t\dfrac{\left(\Delta h\right)^2}{\Delta t} = \sigma^2.t$

Conclusões:

1. Podemos dizer o Movimento Browniano é o limite do passeio aleatório quando o intervalo de tempo e tamanho do passo tendem a zero. Se mantida a relação:

$$\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

2. A relação descrita na fórmula acima é a única que faz com que a variância de (Xt – X0) depende de t e não do número de passos.

3. A relação entre dx e dt não é direta, dx depende de √dt.

4. Transições em *x* em um período finito de tempo são normalmente distribuídas porque quando nº. passos cresce a distribuição binominal tende para a normal.

5. Quando $\Delta t \to 0$, a distância total percorrida em um número finito de passos tende a infinito.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Livros de Processos Estocásticos/Teoria de Filas

(1) De Groot M.H **Probality and Statistics**, Addison Wesley, 1978.

(2) Ross, SM. **Introduction to Probability Models**, Academic Press,

(3) Bhat, U.N. **Elements of Applied Stochastic .Process**, Weley

(4) Feller N. **An Introduction to Probabilty Models and its Applications**. Wesley

(5) Kleinrock, L., **Queueing Systems, Vol. 1: Theory**, Wiley-Interscience Publication, 1975;

(6) Magalhães, M. N., **Introdução à Rede de Filas**, Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, ABE – Associação Brasileira de Estatística, 1996;

Livros de Pesquisa Operacional

(7) Willians, H.P . (1984), **Model Building in mathematical Programming**. Ed. Wiley;

(8) Arenales et.Al. (2007), **Pesquisa Operacional**, Ed. Campus

(9) Ragsdale, N. (2001), **Speadsheet Modeling and Decision Analysis**, Ed. Southwestern College Publishing.

(10) Simchi-Levi, D., Kaminsky, P. & Simchi-Levi, E., "**Cadeia de Suprimentos: Projeto e Gestão"** Ed. Bookman, 2003.

(11) Winston, W. L. "**Operations Research: Applications and Algorithms**", 3rd edition. Belmont, Duxbury Press, 1993.

(12) Hillier, F. S., Lieberman, G. J., **Introdução a Pesquisa Operacional**, Editora Campus, RJ, 1988, pp 394-444;

(13) Philips, Ravidran, Soeberg, **Pesquisa Operacional**.

(14) Novaes, Antônio Galvão, **Pesquisa Operacional e Transportes**, McGraw-Hill, USP, 1975;

(15) Santos, M. P., **Pesquisa Operacional**, Departamento de Matemática Aplicada - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2003;

(16) Wagner, Harvey M., **Pesquisa Operacional**, Prentice Hall, Rio de Janeiro, 1986;

Livros de Simulação

(17) Chwif, L., Medina, A.C.; **Modelagem e Simulação de Eventos Discretos, Teoria e Aplicações.** Ed. dos Autores, 2006

(18) Law, A.M.; Kelton, W.D.; **Simulation Modeling and Analysis**, MacGraw Hill, 2000.

(19) Saliby, E. **Repensando a Simulação;** Ed. Atlas, 1989.

5. LISTA DE EXERCICIOS RESOLVIDOS DE PROCESSOS ESTOCASTICOS

01) Uma floresta é constituída de dois tipos de árvores: aquelas com até 3 metros e as maiores do que 3 metros. A cada ano 40% das árvores com até 3m morrem, 10% são vendidas por $20 cada, 30% permanecem com até 3 metros e 20% crescem para acima de 3m. Das árvores maiores do que 3m a cada ano são vendidas 50% por $50 cada, 20% por $30 cada e 30% permanecem na floresta.

a) Qual a probabilidade de que uma árvore, com menos de 3m, morra antes de ser vendida?
b) Se uma árvore (com menos de 3m) é plantada, qual é o seu valor esperado de venda?

M, V20, V30 e V50 são estados absorventes.

$$P = \begin{array}{c} \\ -3 \\ +3 \\ M \\ V20 \\ V30 \\ V50 \end{array} \begin{array}{cccccc} -3 & +3 & M & V20 & V30 & V50 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0,2 & 0,5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

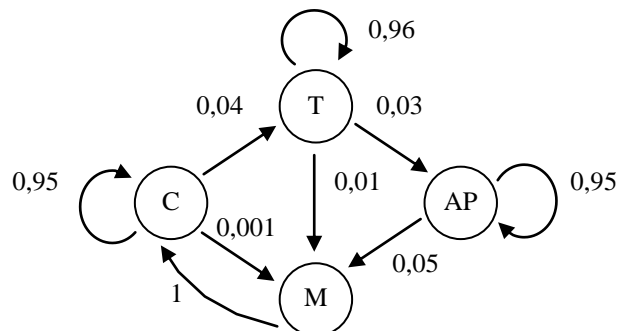
$$E = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,428 & 0,408 \\ 0 & 1,428 \end{bmatrix}, \qquad A = E.R = \begin{bmatrix} 0,571 & 0,142 & 0,082 & 0,204 \\ 0 & 0 & 0,285 & 0,714 \end{bmatrix}$$

c) Probabilidade de que uma árvore, com menos de 3m, morra antes de ser vendida:
$a_{-3,M} = 0,571 \cong 57\%$

d) Valor esperado de venda, se uma árvore com menos de 3m é plantada:
$V_{esp} = 20*0,142 + 30*0,082 + 50*0,204 = \$15,50$

02) Com a chegada da civilização, os índios da Aldeia Taipan resolveram instituir um sistema de previdência social, para o que contaram com a ajuda de um consultor, Mestre em Engenharia de Produção. A primeira etapa do estudo do consultor consistiu em classificar os índios em três grupos: crianças, trabalhadores e aposentados. Logo em seguida, utilizando a excelente memória dos índios, ele inferiu os seguintes dados: durante um período de um ano, 959/1000 de todas as crianças permanecem crianças, 40/1000 se tornam adultos trabalhadores e 1/1000 delas morrem; além disto, ainda durante um dado ano, 960/1000 de todos os adultos trabalhadores permanecem adultos trabalhadores, 30/1000 se aposentam e 10/1000 falecem. A taxa de mortalidade dos aposentados é de 50/1000 a cada ano. O número de nascimentos é de 1000 crianças por ano.

a) Supondo que a população da Aldeia está em regime permanente determine a sua população, bem como sua estrutura etária (nos três grupos mencionados).
b) Cada aposentado recebe uma pensão de $ 5.000 por ano. O fundo de pensão é custeado pelos pagamentos dos adultos trabalhadores. Com quanto cada adulto trabalhador deve contribuir, por ano, para o fundo de pensão?

Como a população da Aldeia está em regime permanente, o número de nascimentos é igual ao número de mortes, isto está representado pela transição M →C.

Usando a Lei da Conservação de Fluxo e o fato de que o número de mortes é igual ao número de nascimentos, temos o sistema:

$$\begin{cases} 0{,}04C = (0{,}03 + 0{,}01)T \\ 0{,}03T = 0{,}05AP \\ 0{,}05AP + 0{,}01T + 0{,}001C = 1M \\ 1M = (0{,}04 + 0{,}001)C \\ M = 1000 \end{cases}$$

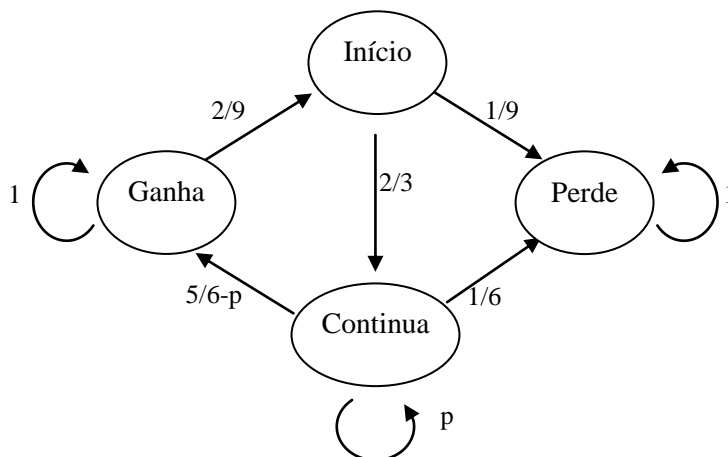
Logo:

a) População da Aldeia e sua estrutura etária:

Crianças:	C = 24.390 + 1000 = 25390	(1000 nascimentos por ano)
Trabalhadores:	T = 24.390	
Aposentados:	AP = 14.634	
População total:	64.414 índios	

b) Valor a pagar aos aposentados: 14.634 * 5.000

Então cada trabalhador deve contribuir com: $\frac{14.634 * 5.000}{24.390} = \$ 3000$ / ano

03) No jogo de Craps, nós jogamos um par de dados de seis faces. No primeiro lançamento, se tirarmos 7 ou 11 nós ganhamos imediatamente. Se tirarmos 2, 3 ou 12 perdemos imediatamente. Se o resultado do primeiro lançamento for 4, 5, 6, 8, 9, 10 nós continuamos a lançar os dados até obtermos um 7, quando perdemos, ou até obtermos o mesmo resultado que o primeiro lançamento, quando ganhamos. Use os seus conhecimentos de Cadeias de Markov para determinar nossa probabilidade de vitória.

Do estado inicial (antes do primeiro lance de dados) o jogador pode ganhar de primeira se tirar 7 (6/36) ou 11(2/36), com 2/9 de probabilidade. Pode ainda perder de primeira se tirar 2 (1/36); 3 (2/36) ou 12 (1/36), com 1/9 de probabilidade. Poderá ainda continuar jogando, caso não ganhe e nem perca, com probabilidade:

$$1 - 1/9 - 2/9 = 2/3$$

Os estados P (Perde) e G (Ganha) são absorventes.
Do estado C (Continua) perderá se obtiver um 7 (1/6). Logo $p_{CP} = 1/6$.

Cálculo de p:

a) Seja *p(P)* a probabilidade de perder o jogo

$$p(P) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}.\frac{1}{6} + \frac{2}{3}.p.\frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{3}.p^n.\frac{1}{6} + \ldots$$

Assim $p(P) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}.\frac{1}{6}\left[1 + p + \cdots + p^n + \cdots\right] = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-p}\right)$

Outra maneira de chegar a este resultado seria construir P

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & p & 5/6 - p & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = (I - Q)^{-1}.R = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2/9 & 1/9 \\ 5/6 - p & 1/6 \end{bmatrix}$$

Assim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2/3(1-p) \\ 0 & 1/(1-p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/9 & 1/9 \\ 5/6 - p & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} + \frac{5-6p}{9(1-p)} & \frac{1}{9} + \frac{1}{9(1-p)} \\ \frac{5-6p}{6(1-p)} & \frac{1}{6(1-p)} \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de $p(P) = \sum_{i=2}^{12} p(P \mid i).p(i)$ (do Teorema da Probabilidade Total)

A probabilidade de perder é a soma dos produtos da probabilidade de perder, dado que tirou *i* no primeiro lançamento, pela probabilidade de tirar *i* no primeiro lançamento.

$p(P \mid 2)p(2)$ = 1 . 1/36

$p(P \mid 3)p(3)$ = 1 . 2/36

$p(P \mid 4)p(4) = \{p(7) + [1-p(7)-p(4)]\, p(7) + \ldots + [1-p(7)-p(4)]^n\, p(7) + \ldots\}p(4)$

$= [\,p(7)p(4)] / [\,p(7) + p(6)] = 2/36 = p(P \mid 10)p(10)$

Analogamente:

$p(P \mid 5)p(5) = [\,p(7)p(5)] / [\,p(7) + p(5)] = 24/360 = p(P \mid 9)p(9)$

p(*P* | 6)*p*(6) = [*p*(7)*p*(6)] / [*p*(7) + *p*(6)] = 30/396 = *p*(*P* | 8)*p*(8)
p(*P* | 7)*p*(7) = 0
p(*P* | 11)*p*(11) = 0
p(*P* | 12)*p*(12) = 1/36

Logo *p*(*P*) = 0,507 ⇒ *p*(*G*) =0,493

Mas: $p(P) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9(1-p)}$. Portanto, **p = 0,7194**

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 0{,}7194 & 0{,}1139 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}376 \\ 0 & 3{,}564 \end{bmatrix}$$

$$A = E.R = \begin{bmatrix} 0{,}493 & 0{,}507 \\ 0{,}406 & 0{,}594 \end{bmatrix}$$

Probabilidade de vitória: **π_G = 0.493**

Probabilidade de derrota: π_P = 0.507

Probabilidade de Ganhar dado que no primeiro lançamento tirou 6:

$$P(G\,|\,6) = \frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)\frac{5}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 \frac{5}{36} + \cdots + \left(\frac{25}{36}\right)^n \frac{5}{36} + \cdots = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{5}{11}$$

Outra forma de pensar o problema é estender o estado “continua” em seis estados transientes, representados pelas pontuações obtidas na primeira jogada que implicam em continuação do jogo, a saber: 4, 5, 6, 8, 9 e 10. As probabilidades de transição se encontram na matriz abaixo. Por simplicidade, dispensamo-nos de esboçar o D.T.E. correspondente.

		I	4	5	6	8 9	10	G	P	
	I	0	3/36	4/36	5/36	5/36	4/36	3/36	8/36	
	4		4/36							
	5	0	27/36	0	0	0	0	0	3/36	
	6		6/36							
P =	8	0	0	26/36	0	0	0	0	4/36	
	9		6/36							
	10	0	0	0	25/36	0	0	0	5/36	
	G		6/36							
	P	0	0	0	0	25/36	0	0	5/36	
			6/36							
		0	0	0	0	0	26/36	0	4/36	
			6/36							
		0	0	0	0	0	0	27/36	3/36	
			6/36							
		0	0	0	0	0	0	0	1	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	1

Q =

0	3/36	4/36	5/36	5/36	4/36	3/36
0	27/36	0	0	0	0	0
0	0	26/36	0	0	0	0
0	0	0	25/36	0	0	0
0	0	0	0	25/36	0	0
0	0	0	0	0	26/36	0
0	0	0	0	0	0	27/36

I-Q =

1	-3/36	-4/36	-5/36	-5/36	-4/36	-3/36
0	9/36	0	0	0	0	0
0	0	10/36	0	0	0	0
0	0	0	11/36	0	0	0
0	0	0	0	11/36	0	0
0	0	0	0	0	10/36	0
0	0	0	0	0	0	9/36

$(I-Q)^{-1}$=

1	1/3	2/5	5/11	5/11	2/5	1/3
0	4	0	0	0	0	0
0	0	18/5	0	0	0	0
0	0	0	36/11	0	0	0
0	0	0	0	36/11	0	0
0	0	0	0	0	18/5	0
0	0	0	0	0	0	4

O tempo médio de jogo será 3,376; obtido por 1 + 1/3 + 2/5 + 5/11 + 5/11 + 2/5 + 1/3.

$A = (I-Q)^{-1}.R =$

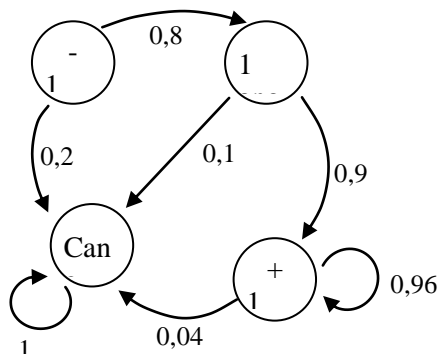
	G	P
I	35/72	37/72
4	1/3	2/3
5	2/5	3/5
	5/11	6/11
6	5/11	6/11
8	2/5	3/5
9	1/3	2/3
10		

Probabilidade de vitória: π_G **= a** $_{IG}$ **= 35/72 = 0.49**

Probabilidade de derrota: $\pi_P = a_{IP} = 37/72 = 0.51$

Probabilidade de Ganhar dado que no primeiro lançamento tirou 6: $P(G|6) = a_{6G} = 5/11$

04) A Gazeta da Produção tem as seguintes informações a respeito de seus assinantes: Durante o primeiro ano 20% dos assinantes cancelam suas assinaturas. Daqueles que completaram o 1º ano, 10% cancelam sua assinatura no 2º ano. Daqueles que assinam por mais de 2 anos 4% irão cancelá-los durante algum dos próximos anos. Em média qual a duração de uma assinatura da Gazeta da Produção?

-1
0,8
1
0,2
0,1
0,9
Can
+1
0,96
1
0,04

P =	-1 ano	1ano	+1ano	Cancela
-1ano	0	0,8	0	0,2
1ano	0	0	0,9	0,1
+1ano	0	0	0,96	0,04
Cancela	0	0	0	1

$$E = (I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,8 & 0 \\ 0 & 1 & -0,9 \\ 0 & 0 & 0,04 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 18 \\ 0 & 1 & 22,5 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

d_i – duração média do regime transiente (assinatura) dado estado inicial i

$$d_i = \sum_{j \in T} e_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} d_{-1} = 19,8 \ \ anos \\ d_1 = 23,5 \ \ anos \\ d_{+1} = 25 \ \ anos \end{cases}$$

Duração média de uma assinatura: **19,8 anos**

05) O tempo em Pedra Azul pode ser descrito, como dependente do tempo nos dois últimos dias, pelo seguinte mecanismo: (i) se os últimos dois dias foram ensolarados então existe 95% de chance de amanhã também ser ensolarado; (ii) se ontem esteve chuvoso e hoje ensolarado então com 70% de chance amanhã será ensolarado; (iii) se ontem estava ensolarado e hoje está chuvoso então amanhã será um dia chuvoso com 60% de chance; (iv) se os dois últimos dias foram chuvosos então amanha será um dia chuvoso com 80% de chance.

É possível modelar o tempo em Pedra Azul como uma cadeia de Markov? Explique porque e construa o diagrama de transição de estados.

Sim, é possível modelar como uma cadeia de Markov se o estado trouxer a informação dos 2 últimos dias, assim toda informação que preciso para o próximo estado está contida no estado anterior.

P =

	E.E.	C.E.	E.C.	C.C.
E.E.	0,95	0	0,05	0
C.E.	0,7	0	0,3	0
E.C.	0	0,4	0	0,6
C.C.	0	0,2	0	0,8

06) Suponha que no mercado existem apenas duas marcas de cerveja Mharba e Ártica. Dado que a última compra de uma pessoa foi uma de Mharba, existe 90% de chance de que sua próxima compra seja de Mharba. Dado que a última compra de uma pessoa foi de Ártica existe uma probabilidade de 80% de que sua próxima compra seja de Ártica.

a) Represente o problema por uma cadeia de Markov, apresentando a matriz de probabilidades de transição e o diagrama de transição de estados.
b) Dado que uma pessoa acabou de comprar Mharba quanto tempo será necessário para que outra compra de Mharba seja realizada ? E de Ática? Como você interpreta o tempo neste caso?
c) Suponha ainda que cada consumidor faça uma compra de cerveja por semana (1 ano = 52 semanas), e que existam 100 milhões de consumidores de cerveja. Uma unidade de cerveja é vendida por $2 e custa à cervejaria $1. Por $500 milhões por ano uma firma de propaganda garante diminuir de 10% para 5% a fração dos clientes de Mharba que mudam para Ártica depois de uma compra. Deve a cervejaria Mharba contratar a empresa de propaganda?

a)

0,1 ; 0,9 ; M ; A ; 0,8 ; 0,2

$$P = \begin{array}{c} \\ M \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & A \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) $\begin{cases} 0,1 \quad \pi_M = 0,2 \quad \pi_A \\ \pi_M + \pi_A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_A = 1/3 \\ \pi_M = 2/3 \end{cases}$

Dado que uma pessoa acabou de comprar Mharba, o tempo necessário para realizar:

- outra compra de Mharba: tempo médio de 1º retorno = m_{MM} = ?
- uma compra de Ática: tempo médio de 1ª passagem = m_{MA} = ?

$m_{MM} = \dfrac{1}{\pi_M} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

$m_{MA} = 1 + p_{MM} \,.\, m_{MA} \quad \Rightarrow \quad m_{MA} = 1 + 0,9 \,.\, m_{MA} \quad \Rightarrow \quad m_{MA} = 10$

O tempo é interpretado como o número de compras de cerveja realizadas.

c) Quantidade de cerveja comprada por ano: N = 52 * 100 milhões = 5,2 bilhões

- Sem contratar a empresa de propaganda:

Quantidade de Mharba comprada por ano: $N_M = N * \pi_M$ = 3,47 bilhões
Lucro obtido: $L_M = N_M$ * (\$2-\$1) = \$ 3,47 bilhões

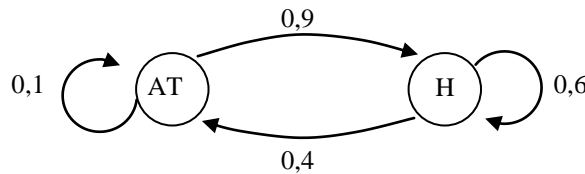
- Contratando a empresa de propaganda:

A matriz de probabilidades de transição se altera para:

$$P' = \begin{array}{c} \\ M \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & A \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} 0,05 \quad \pi'_M = 0,2 \quad \pi'_A \\ \pi'_M + \pi'_A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi'_A = 1/5 \\ \pi'_M = 4/5 \end{cases}$$

Quantidade de Mharba comprada por ano: $N_M' = N * \pi_M'$ = 4,16 bilhões
Lucro obtido: $L_M' = N_M'$ * (\$2-\$1) - \$500 milhões = \$ 3,66 bilhões

Como $L_M' > L_M$, então vale a pena contratar a empresa de propaganda.

07) Uma companhia com um vôo às 7h45 da manhã entre Rio e Brasília não quer que o vôo se atrase dois dias seguidos na mesma escala. Se o vôo sai atrasado um dia, a companhia faz um esforço especial no dia seguinte para que o vôo saia no horário, e obtém sucesso em 90% das vezes. Se o vôo não saiu atrasado no dia anterior, a companhia não toma providências e o vôo sai como escalado em 60% das vezes. Que percentual de vezes o vôo sai atrasado? Qual o tempo médio entre dois vôos no horário?

$$\begin{cases} 0{,}9 \ \ \pi_{AT} = 0{,}4 \ \ \pi_H \\ \pi_{AT} + \pi_H = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_{AT} = 4/13 \\ \pi_H = 9/13 \end{cases}$$

Percentual das vezes que o vôo sai atrasado: π_{AT} = 4/13 ≅ 30,8%

Tempo médio entre dois vôos no horário é tempo médio de 1º retorno:

$m_{HH} = 1/\pi_H$ = 13/9 = 1,44 dias

08) A Ábaco sistemas de computação registra a cada semana uma demanda equiprovável de 1 ou 2 de seu modelo A500. Todos os pedidos devem ser atendidos do estoque existente. Duas políticas de estoque estão sendo consideradas:

Política I: Se o estoque é de 2 ou menos unidades, coloca-se um pedido de forma que o estoque inicial na próxima semana seja de 4 unidades.

Política II: Se o estoque é de 1 ou menos unidades, coloca-se um pedido de forma que o estoque inicial na próxima semana seja de 3 unidades.

Os seguintes custos são observados na Ábaco:

- ***Custo de comprar um computador: $4.000***
- ***Custo de manter o computador em estoque $100/semana.computador,***
- ***Custo de efetuar um pedido $500 (além do custo de $4.000 por computador).***

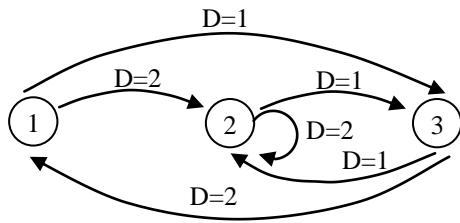
Qual política tem o menor custo semanal esperado?

Modelo → Estoque

Transição → Mudança de semana

Estado → nº de peças em estaque no fim de semana, antes de repor o estoque

P (D = 1) = P (D = 2) = 0,5

<u>Política I</u>: Estoque máximo ao fim da semana: 3
Estoque mínimo ao fim da semana: 1

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{array}$$

Transições da parte superior implicam em pedidos.

$$\begin{cases} \pi_1 = 0,5 \quad \pi_3 \\ \pi_2 = 0,5 \quad \pi_1 + 0,5 \quad \pi_2 + 0,5 \quad \pi_3 \\ \pi_3 = 0,5 \quad \pi_1 + 0,5 \quad \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 1/6 \\ \pi_2 = 1/2 \\ \pi_3 = 1/3 \end{cases}$$

Custo de manutenção do estoque: $100 * nº médio de computadores em estoque =

$$\$100 \cdot (1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot \pi_3) = \$100 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3}\right) =$$

$216,67

Os pedidos só são feitos quando tem as transições de estado:

$1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$

m_{12} : tempo esperado para o estoque sair de 1 e ir para 2.
$1/m_{12}$: freqüência relativa dado que o estoque estava em 1 e passou para 2

$$\begin{cases} m_{12} = 1 + p_{11} \cdot m_{12} + p_{13} \cdot m_{32} = 1 + 0,5 \cdot m_{32} \\ m_{13} = 1 + p_{11} \cdot m_{13} + p_{12} \cdot m_{23} = 1 + 0,5 \cdot m_{23} \\ m_{23} = 1 + p_{21} \cdot m_{13} + p_{22} \cdot m_{23} = 1 + 0,5 \cdot m_{23} \\ m_{32} = 1 + p_{31} \cdot m_{12} + p_{33} \cdot m_{32} = 1 + 0,5 \cdot m_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{12} = 2 \\ m_{13} = 2 \\ m_{23} = 2 \\ m_{32} = 2 \end{cases}$$

$m_{22} = 1/\pi_2 = 2$

$\left(\frac{1}{m_{12}} + \frac{1}{m_{13}}\right)$: freqüência relativa dado que o estoque está no estado1, esse é o número médio de vezes que o estoque será reabastecido, estando inicialmente no estado 1.

Custo de efetuar pedido: \$500 * nº médio de pedidos =

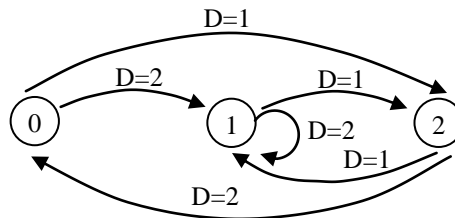
$$\$500\cdot\left\{\left(\frac{1}{m_{12}}+\frac{1}{m_{13}}\right)\cdot\pi_1+\left(\frac{1}{m_{22}}+\frac{1}{m_{23}}\right)\cdot\pi_2\right\}=\$500\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi_2\right\}$$

= \$500.($\pi_1+\pi_2$) = **\$ 333,33**

Custo médio do pedido: \$4000 * nº médio de computadores comprados por semana =

$$\$4000\cdot(3\cdot\pi_1+2\cdot\pi_2+0\cdot\pi_3)=\$4000\cdot\left(3\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{2}+0\right)$$ = **\$6000**

Custo total esperado: \$216,67 + \$333,33 + \$6000 = **\$6550**

Política II: Estoque máximo ao fim da semana: 2
Estoque mínimo ao fim da semana: 0

Como o DTE é idêntico ao da política I $\Rightarrow$ $\begin{cases}\pi_0=1/6\\ \pi_1=1/2\\ \pi_2=1/3\end{cases}$ e $\begin{cases}m_{01}=2\\ m_{02}=2\\ m_{12}=2\\ m_{21}=2\end{cases}$

Custo de manutenção do estoque: \$100 * nº médio de computadores em estoque =

$$\$100\cdot(0\cdot\pi_0+1\cdot\pi_1+2\cdot\pi_2)=\$100\cdot\left(0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}\right)$$ = **\$116,67**

Os pedidos só são feitos quando tem as transições de estado:
$0\to1$, $0\to2$, $1\to1$, $1\to2$

$m_{11} = 1/\pi_1 = 2$

Custo de efetuar pedido: \$500 * nº médio de pedidos =

$$\$500\cdot\left\{\left(\frac{1}{m_{01}}+\frac{1}{m_{02}}\right)\cdot\pi_0+\left(\frac{1}{m_{11}}+\frac{1}{m_{12}}\right)\cdot\pi_1\right\}=\$500\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi_0+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi_1\right\}$$

= \$500.($\pi_0+\pi_1$) = **\$ 333,33**

Custo médio do pedido: \$4000 * nº médio de computadores comprados por semana =

$$\$4000 \cdot (3 \cdot \pi_0 + 2 \cdot \pi_1 + 0 \cdot \pi_2) = \$4000 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 0\right) = \mathbf{\$6000}$$

Custo total esperado: \$116,67 + \$333,33 + \$6000 = **\$6450**

Logo Política tem o menor custo semanal esperado, devido ao menor custo de manutenção de estoque.

09) O programa de treinamento de supervisores de produção de uma determinada companhia consiste de duas fases. A fase 1 a qual envolve 3 semanas de aula teórica, é seguida da fase 2 a qual envolve 3 semanas de aprendizagem prática. Pelas experiências anteriores, a companhia espera que somente 60% dos candidatos da fase teórica passem para a fase prática, com os 40% restantes sendo desligados do programa de treinamento. Dos que fazem a parte prática, 70% são graduados como supervisores, 10% enviados para repeti-la e 20% dispensados.

a) Desenhe o diagrama de transição de estados.
b) Quantos supervisores pode a companhia esperar formar de seu programa normal de treinamento, se existem 45 pessoas na fase teórica e 21 na fase prática?

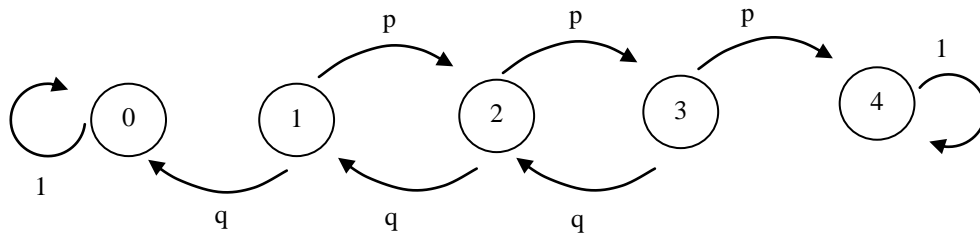
Fase 1
0,6
0,4
Fase 2
0,1
0,7
0,2
Supervisor
1
Dispensado
1

$$P = \begin{array}{c|cc:cc} & 1 & 2 & D & S \\ \hline 1 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ \hdashline D & 0 & 0 & 1 & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$A = (I - Q)^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 10/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/15 & 7/15 \\ 2/9 & 7/9 \end{bmatrix}$$

Nº esperado de supervisores: $45 \cdot a_{1S} + 21 \cdot a_{2S} = 45 \cdot \frac{7}{15} + 21 \cdot \frac{7}{9} = \frac{112}{3} \cong 37$

10) No instante 0, eu tenho \$1. Nos instantes 1, 2, 3, ... eu jogo um jogo no qual eu aposto \$1. A cada lance tenho uma probabilidade p de ganhar \$1 e probabilidade q= 1 - p de perder \$1 Meu objetivo é aumentar meu capital para \$4, e tão logo eu o

consiga eu saio do
jogo, assim como se eu ficar sem nenhum dinheiro.
a) Construa a matriz de probabilidades de transição e o diagrama de transição de estados para a cadeia de Markov que modela o jogo.
b) Após 2 jogadas qual a probabilidade que eu tenha $2 ? E $3?
c) Porque não é razoável para este jogo falar em probabilidades de regime permanente?

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & p & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} pq & 0 & p^2 & 0 & q \\ 0 & 2pq & 0 & p^2 & q^2 \\ q^2 & 0 & pq & p & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Após 2 jogadas, probabilidade de ter \$2: $p_{12}^{(2)} = 0$
\$3: $p_{13}^{(2)} = p^2$

As probabilidades de regime permanente descrevem as chances não nulas do processo estar em cada estado ao longo do tempo. Como o processo em questão apresenta dois estados absorventes, segue que as chances do processo estar num estado transiente tenderão a zero ao longo do tempo, enquanto as chances de estar num dos estados absorventes tenderão a 1.

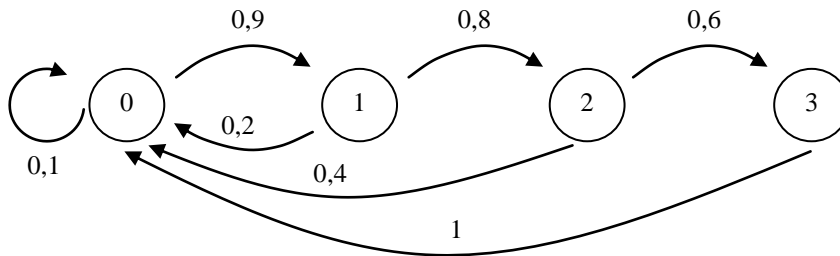
11) O livro de didático "PO - A Solução" vende 1 milhão de exemplares a cada ano. Alguns dos leitores conservam o livro enquanto outros vendem o livro de volta para a livraria. Suponha que 90% de todos os estudantes que compram um novo livro o vendam de volta, que 80% dos estudantes que compram o livro com um ano de uso o vendam de volta e que 60% dos estudantes que compram um livro com dois anos de uso o vendam de volta. Os livros com 4 ou mais anos de uso já estão muito usados e não são mais negociados.

a) Em regime permanente, quantos novos exemplares do livro pode a editora esperar vender do livro?

b) Suponha que o lucro da livraria com cada tipo de livro seja de $6 por um livro novo, $3 por um livro com 1 ano de uso, $2 por um livro com 2 anos de uso e de $1 por livro com 3 anos de uso. Qual o lucro esperado por livro vendido?

Estado: idade do livro vendido, pela editora, no começo do estágio

Estágio: ano letivo

Transição: mudança de ano

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0,6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 0{,}1 \ \pi_0 + 0{,}2 \ \pi_1 + 0{,}4 \ \pi_2 + \pi_3 \\ \pi_1 = 0{,}9 \ \pi_0 \\ \pi_2 = 0{,}8 \ \pi_1 \\ \pi_3 = 0{,}6 \ \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0{,}3277 \\ \pi_1 = 0{,}2949 \\ \pi_2 = 0{,}2359 \\ \pi_3 = 0{,}1415 \end{cases}$$

a) nº esperado de exemplares novos a ser vendido:

proporção de livros novos no mercado * q^{tde} livros vendido/ano =

π0 * 1.000.000 = 327,7 mil exemplares

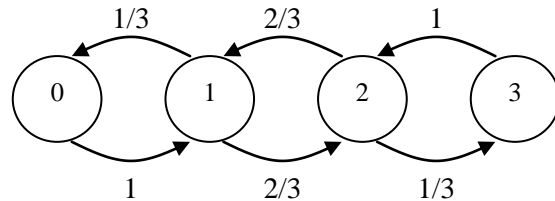
b) Lucro esperado por livro vendido: $6*\pi_0 + 3*\pi_1 + 2*\pi_2 + 1*\pi_3$ = $3,46

12) Três bolas são divididas entre 2 caixas. Durante cada período uma bola é escolhida aleatoriamente e trocada para a outra caixa.

a) Calcule a fração do tempo que uma caixa irá conter 0, 1, 2 ou 3 bolas.
b) Se a caixa 1 não contém bolas, em média quanto tempo será decorrido até que ela contenha 1, 2 e três bolas ?

O processo: uma bola é escolhida aleatoriamente e então é trocada de caixa.

Ex: Estado: caixa 1 contém uma bola.
Se a bola escolhida estiver na caixa 1, ela será trocada de caixa e a caixa 1 passará a ter 0 bolas com probabilidade 1/3 (que é a probilidade de escolher essa bola).
Se a bola escolhida estiver na caixa 2 ela irá para a caixa 1 que passará a ter 2 bolas com probabilidade 2/3 (que é a probabilidade de escolher a bola da caixa 2: 1/3 + 1/3).

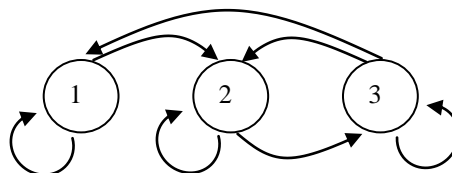
Estado: nº bolas na caixa 1
Transição: trocar uma bola de caixa
Estágio: 1 período

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{cases} \pi_0 = 1/3 \ \ \pi_1 \\ \pi_1 = \pi_{0+} \ 2/3 \ \ \pi_2 \\ \pi_2 = 2/3 \ \ \pi_1 + \pi_3 \\ \pi_3 = 1/3 \ \ \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0{,}125 \\ \pi_1 = 0{,}375 \\ \pi_2 = 0{,}375 \\ \pi_3 = 0{,}125 \end{cases}$$

a) Fração do tempo que a caixa 1 irá conter 0, 1, 2 ou 3 bolas é dado por π_0, π_1, π_2, π_3.

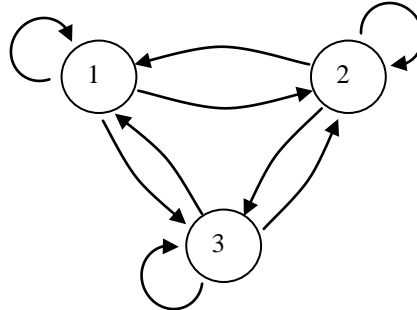
b) Dado que a caixa 1 não contém bolas, em média, o tempo decorrido até que ela contenha 1, 2 e 3 bolas é dado por m_{01}, m_{02} e m_{03} respectivamente.

$$\begin{cases} m_{01} = 1 + p_{02} \cdot m_{21} + p_{03} \cdot m_{31} + p_{00} \cdot m_{01} = 1 \\ m_{02} = 1 + p_{00} \cdot m_{02} + p_{01} \cdot m_{12} + p_{03} \cdot m_{32} = 1 + m_{12} \\ m_{03} = 1 + p_{00} \cdot m_{03} + p_{01} \cdot m_{13} + p_{02} \cdot m_{23} = 1 + m_{13} \\ m_{12} = 1 + p_{10} \cdot m_{02} + p_{11} \cdot m_{12} + p_{13} \cdot m_{32} = 1 + 1/3 \cdot m_{02} \\ m_{13} = 1 + p_{10} \cdot m_{03} + p_{11} \cdot m_{13} + p_{12} \cdot m_{23} = 1 + 1/3 \cdot m_{03} \\ m_{23} = 1 + p_{20} \cdot m_{03} + p_{21} \cdot m_{13} + p_{22} \cdot m_{23} = 1 + 2/3 \cdot m_{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{01} = 1 \\ m_{02} = 3 \\ m_{03} = 10 \\ m_{12} = 2 \\ m_{13} = 9 \\ m_{23} = 7 \end{cases}$$

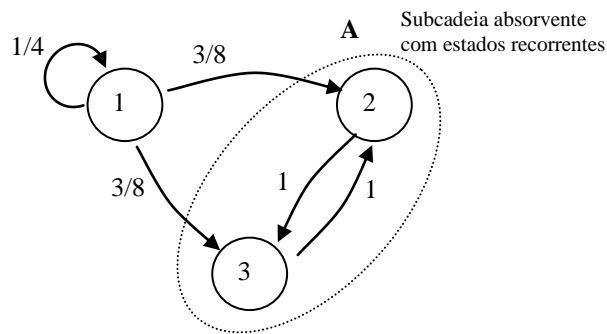
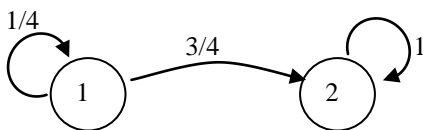
13) Classifique os diversos estados das cadeias de Markov a seguir, dadas por sua matriz de transição. Calcule as probabilidades estacionárias.

a) $P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix}$

Todos os estados são recorrentes.

$$\begin{cases}\pi_1 = 0{,}7\pi_1 + 0{,}4\pi_3 \\ \pi_3 = 0{,}2\pi_2 + 0{,}3\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_1 = 0{,}228 \\ \pi_2 = 0{,}6 \\ \pi_3 = 0{,}1714\end{cases}$$

b) $P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$

Todos os estados são recorrentes.

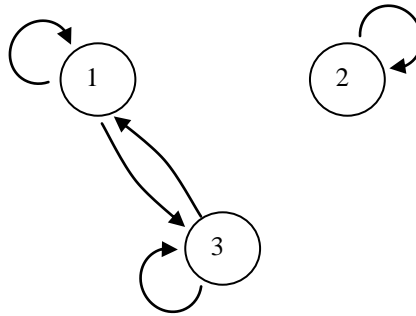
π = [1/6 1/3 1/2]

c) $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Estado 1 é transiente.

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = (I - Q)^{-1} \cdot R = [3/4]^{-1} \cdot [3/4] = [1]$$

Matriz de transição da subcadeia absorvente:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\pi_2 = \pi_3 \\ \pi_2 + \pi_3 = 1\end{cases} \qquad \begin{cases}\pi_2 = 1/2 \\ \pi_3 = 1/2\end{cases}$$

Dado que o estado 1 foi absorvido, existe probabilidade de 0,5 de estar no estado 2 ou 3.

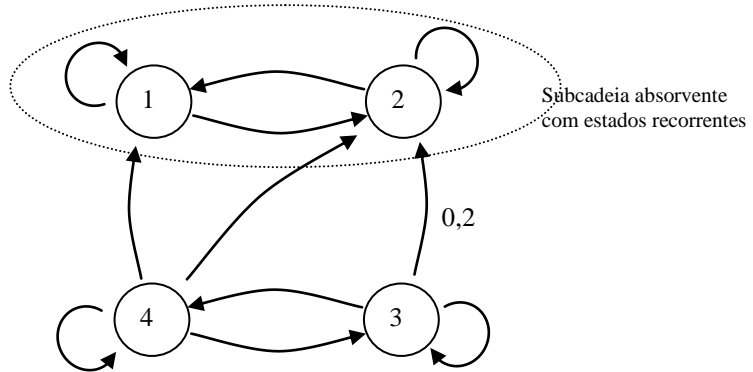
d) $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$

Os estados 1 e 3 são recorrentes.
Estado 2 não é absorvente e
Nem recorrente.

Para os estados 1 e 3:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 1/2\pi_1 + 2/5\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_1 = 4/9 \\ \pi_3 = 5/9 \end{cases}$$

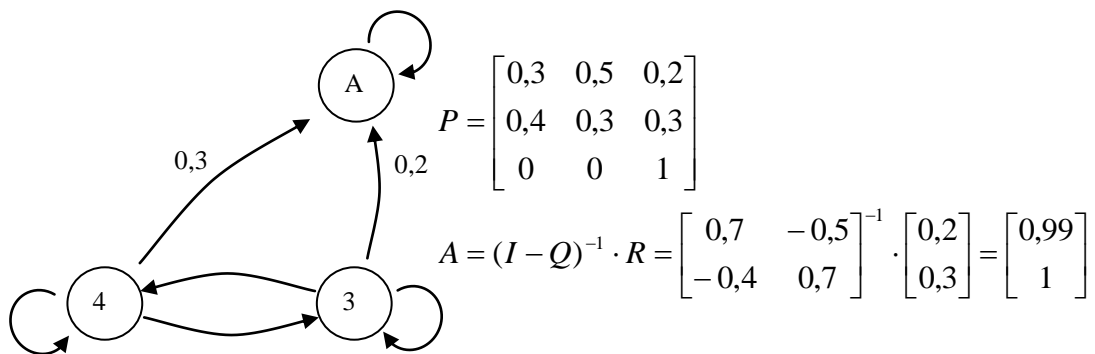
e) $P = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}$

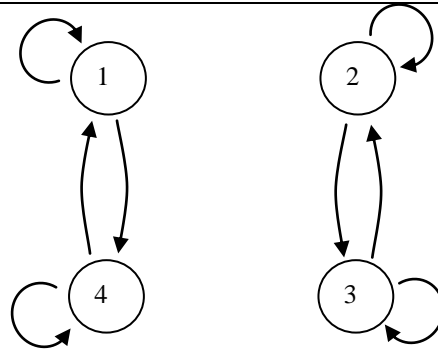
Subcadeia absorvente com estados recorrentes

0,2

Estados 3 e 4 são transientes.

0,3 0,2

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = (I - Q)^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 0{,}7 & -0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}99 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para os estados 1 e 2: $P = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0{,}3\pi_1 + 0{,}6\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_1 = 0{,}461 \\ \pi_2 = 0{,}538 \end{cases}$

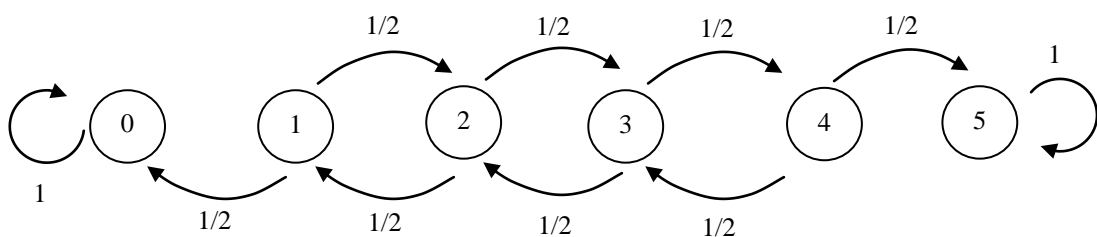
f) $P = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 7/8 \end{bmatrix}$

Estados recorrentes 2,3 e 1,4

Para os estados 1 e 4:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/8 & 7/8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 2/3\pi_1 + 1/8\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_1 = 3/11 \\ \pi_4 = 8/11 \end{cases}$$

Para os estados 2 e 3:

$$P = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_2 = 1/5\pi_2 + 1/4\pi_3 \\ \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_2 = 5/21 \\ \pi_3 = 16/21 \end{cases}$$

14) Dois jogadores jogam uma moeda honesta. Se der cara o jogador I paga R$1 ao jogador II, se der coroa é o jogador II que paga R$1 ao jogador I. Considere que a quantidade total de dinheiro em jogo (isto é a soma das quantias possuídas pelos dois jogadores) é de R$5. Modele o jogo como uma cadeia de Markov. Dado que o jogador I começou o jogo com R$3, calcule o tempo esperado do jogo e a probabilidade de que cada um dos jogadores vença o jogo (isto é alcance R$5).

$$E = (I-Q)^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1{,}6 & 1{,}2 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 2{,}4 & 1{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1{,}6 & 2{,}4 & 1{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 1{,}2 & 1{,}6 \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

d_i : duração do regime transiente, dado que saiu do estado i

Duração média do jogo, dado que jogador I começou com \$3:

$$d_3 = \Sigma_j\, e_{3j} = 0{,}8+1{,}6+2{,}4+1{,}2 = 6 \text{ lançamentos de moeda}$$

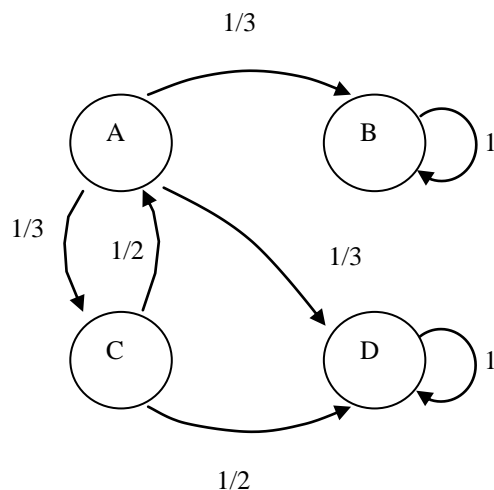
$$A = E.R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 5 & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{array}\right] \end{array}$$

Probabilidade do jogador I ganhar: $a_{35} = 0{,}6$
Probabilidade do jogador II ganhar = probabilidade do jogador I perder: $a_{30} = 0{,}4$

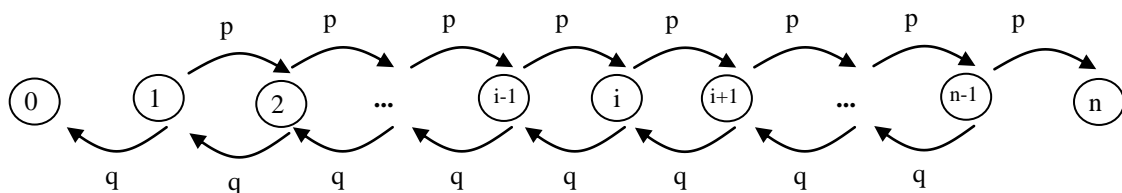
15) Quatro meninos (A, B, C e D) brincam de lançar disco. Se o menino A recebe o disco lança-o para B, C ou D com iguais probabilidades; se C recebe o disco lança-o para A ou D com iguais probabilidades; se B ou D recebem o disco, ficam com o mesmo. Modele o problema como uma cadeia de Markov. Desenhe também o diagrama de transição de estados.

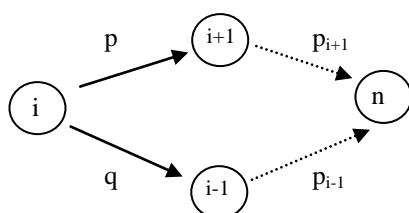
a) Se o disco está com C qual a probabilidade de D ficar com o disco?

b) Se A está com o disco qual a probabilidade do disco terminar com B ?

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ C \\ B \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & C & B & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$A = (I - Q)^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 6/5 & 2/5 \\ 3/5 & 6/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Probabilidade do disco ficar com D dado que estava com C: $a_{CD} = 4/5$
Probabilidade do disco ficar com B dado que estava com A: $a_{AB} = 2/5$

16) Considere um jogador que a cada lance de um jogo tem uma probabilidade p de ganhar uma unidade e probabilidade q= 1 - p de perder uma unidade. Assumindo que sucessivos lances são independentes qual é a probabilidade que começando com i unidades a fortuna do jogador alcance n antes de chegar a 0?

Se i = 0 $\rightarrow$ $P_0 = 0$
Se i = n $\rightarrow$ $P_n = 1$
$P_i = a_{in}$ = probabilidade do processo ser absorvido em n dado que começou em i

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, \quad i = 1,2,\ldots,n-1.$$

$$P_i = p.P_{i+1} + q.P_{i,i-1,} \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

$$pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$$

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}\left(P_i - P_{i-1},\right) \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

Então para:

$$i=1:\ P_2-P_1=\frac{q}{p}\left(P_1-P_0\right)=\frac{q}{p}P_1$$

$$i=2:\ P_3-P_2=\frac{q}{p}\left(P_2-P_1\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^2P_1$$

$$\vdots$$

$$i=i-1:\ P_i-P_{i-1}=\frac{q}{p}\left(P_{i-1}-P_{i-2}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}P_1$$

$$\vdots$$

$$i=n-1:\ P_n-P_{n-1}=\left(\frac{q}{p}\right)\left(P_{n-1}-P_{n-2}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}P_1$$

Somando as linhas acima, para i variando de 1 a (i-1), temos:

$$P_i-P_1=P_1\left[\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

$$P_i=\begin{cases}\dfrac{1-\left(q/p\right)^i}{1-\left(q/p\right)}P_1 & se\quad \dfrac{q}{p}\neq 1\\ iP_1 & se\quad \dfrac{q}{p}=1.\end{cases}$$

Somando as linhas acima, para i variando de 1 a (n-1), temos:

$$P_n-P_1=P_1\left[\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right]$$

Como P_n = 1:

$$P_1=\begin{cases}\dfrac{1-\left(q/p\right)}{1-\left(q/p\right)^n} & se\quad p\neq\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{n} & se\quad p=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Logo

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^n} & se \quad p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{i}{n} & se \quad p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A probabilidade de ganhar o jogo, dado que começou com i unidades, é dada por P_i quando $n \to \infty$:

$$\underset{n \to \infty}{P_i} = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i & se \quad p > \dfrac{1}{2} \\ 0 & se \quad p \leq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

17) Uma loja de máquinas fotográficas estoca um modelo de máquina fotográfica particular que pode ser encomendado semanalmente. Sejam D_1, D_2, ..., D_i,... variáveis aleatórias que representam a demanda pelas máquinas durante a semana i. Seja X_o o estoque existente de máquinas, e X_i o número de máquina disponíveis ao final da semana i. Sábado à noite a loja faz uma encomenda que será entregue em tempo para a abertura da loja na 2ª feira. A política de encomendas da loja é (s,S)=(1,3); ou seja, se no Sábado a noite a quantidade de máquinas em estoque for menor que s=1 (nenhuma máquina em estoque), então a loja encomendará (até) S=3 máquinas; caso contrário nenhuma máquina será encomendada. É suposto que haja perdas de vendas quando a demanda exceder o estoque disponível. As variáveis aleatórias podem ser avaliadas iterativamente pela expressão:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{(3-D_{t+1}),0\}, \text{se} X_t < 1 \\ \max\{(X_t - D_{t+1}),0\}, \text{se} X_t \geq 1 \end{cases}$$

Considerando que a demanda tem uma distribuição de Poisson com média 1, a matriz de transição de uma etapa é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$$

a) Descreva como a matriz de transições pode ter sido obtida.
b) Se o processo iniciou com um estoque de 3 máquinas qual o tempo esperado para que o estoque se esgote ?
c) Qual a probabilidade de encontrar o estoque com 0, 1, 2, 3 e 4 máquinas ?

d) Qual o tempo médio entre duas encomendas?

a) A matriz foi obtida usando a tabela da distribuição de Poisson. Onde $P(D_{t+1}=0) = P(D_{t+1}=1) = 0,368$, $P(D_{t+1}=2) = 0,184$ e $P(D_{t+1}=3) = 0,0613$

Ex:

Se $X_t= 0$, o estoque é reposto e fica com 3 máquinas.
Logo, a probabilidade de que $X_{t+1}=3$ ($D_{t+1}=0$) ou $X_{t+1}=2$ ($D_{t+1}=1$) é de 0,368. A probabilidade de que $X_{t+1}=1$ ($D_{t+1}=2$) é de 0,184. Se $D_{t+1}\geq 3$, então $X_{t+1}=0$; nesse caso, a probabilidade é de 1-0,368-0,368-0,184 = 0,08.

b) Tempo esperado para que o estoque se esgote, dado que iniciou com 3 máquinas: m_{30}

$$\begin{cases} m_{30} = 1 + p_{31}m_{10} + p_{32}m_{20} + p_{33}m_{30} \\ m_{20} = 1 + p_{21}m_{10} + p_{22}m_{20} + p_{23}m_{30} \\ m_{10} = 1 + p_{11}m_{10} + p_{12}m_{20} + p_{13}m_{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{30} = 3,5 \\ m_{20} = 2,5 \\ m_{10} = 1,6 \end{cases}$$

c) Probabilidade de encontrar o estoque com 0, 1, 2 e 3 máquinas é dada pelo vetor π

$$\begin{cases} \pi_0 = 0,08\ \pi_0 + 0,632\ \pi_1 + 0,264\ \pi_2 + 0,08\ \pi_3 \\ \pi_2 = 0,368\ \pi_0 + 0,368\ \pi_2 + 0,368\ \pi_3 \\ \pi_3 = 0,368\ \pi_0 + 0,368\ \pi_3 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0,2857 \\ \pi_1 = 0,2848 \\ \pi_2 = 0,2632 \\ \pi_3 = 0,1663 \end{cases}$$

A probabilidade de encontrar 4 máquinas no estoque é 0.

d) Tempo médio entre duas encomendas:

tempo médio de retorno para o estado 0 = $m_{00} = 1/\pi_0 = 3,5$ semanas

18) Um naturalista está observando o comportamento de um sapo em um pequeno lago, no qual há 4 ninféias (plantas aquáticas). O sapo circula entre estas 4 plantas pulando de uma para outra, as quais são numeradas arbitrariamente de 1 a 4. A probabilidade do sapo pular de uma planta para outra é inversamente proporcional a distância entre elas (isto é, o sapo prefere pular para uma planta mais perto do que para uma mais longe). As distâncias entre as plantas são:

	2	3	4
1	6/5	2	3/2
2		6/7	1/2
3			3/4

a) Defina a matriz de transição
b) Calcule as probabilidades de regime permanente

c) Interprete estas probabilidades em termos do comportamento do sapo.
d) Explique, do ponto de vista do sapo, o que significam as hipóteses de Markov e de estacionariedade.

a) Tabela com o inverso das distâncias:

	1	2	3	4
1	0	5/6	1/2	2/3
2	5/6	0	7/6	2
3	1/2	7/6	0	4/3
4	2/3	2	4/3	0

A soma das linhas da matriz de transição deve ser igual a 1, portanto:

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)K_1 = 1 \;\Rightarrow\; K_1 = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{4}{3}\right)K_3 = 1 \;\Rightarrow\; K_3 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+2\right)K_2 = 1 \;\Rightarrow\; K_2 = \frac{1}{4} \qquad \left(\frac{2}{3}+2+\frac{4}{3}\right)K_4 = 1 \;\Rightarrow\; K_4 = \frac{1}{4}$$

Multiplicando cada linha da tabela acima pelas constantes encontradas, obtém-se a matriz de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 5/24 & 0 & 7/24 & 1/2 \\ 1/6 & 7/18 & 0 & 4/9 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

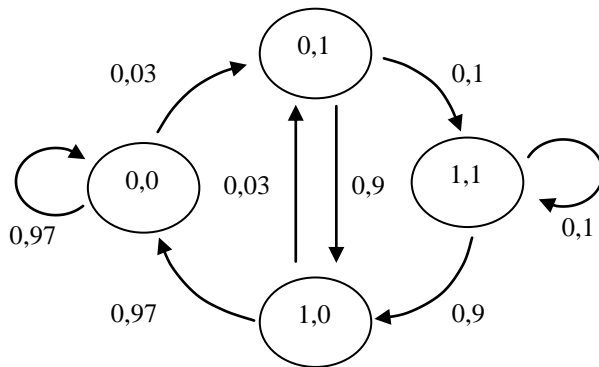
b) $$\begin{cases} \pi_1 = 5/24\;\;\pi_2 + 1/6\;\;\pi_3 + 1/6\;\;\pi_4 \\ \pi_2 = 5/12\;\;\pi_1 + 7/18\;\;\pi_3 + 1/2\;\;\pi_4 \\ \pi_3 = 1/4\;\;\pi_1 + 7/24\;\;\pi_2 + 1/3\;\;\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0{,}1538 \\ \pi_2 = 0{,}3077 \\ \pi_3 = 0{,}2308 \\ \pi_4 = 0{,}3077 \end{cases}$$

c) As probabilidades de regime permanente indicam a fração de tempo que o sapo passa em cada planta.

d) As hipóteses de Markov, do ponto de vista do sapo, significam que ele não tem memória. Por exemplo, ele não sabe se determinado lugar tem mosca ou não, ou ainda, se determinada planta afunda ou não; as chances de ir para a próxima planta só dependem da planta onde ele está. A propriedade de estacionariedade indica que o sapo não aprende ao longo do tempo. O próximo salto é aleatório.

19) Se-segura Companhia de Seguras classifica seus clientes de acordo com seu histórico de acidentes (do cliente). Um cliente que não tenha tido nenhum acidente nos últimos dois anos tem uma anualidade de $100. Clientes que tenham tido acidentes em ambos os anos tem uma anualidade de $400. Clientes que tenham tido acidente em somente um dos últimos dois anos tem uma anualidade de $300. Um cliente que tenha tido um acidente no último ano tem 10% de chance de ter um acidente no ano corrente. Se o cliente não tiver tido nenhum acidente no último ano ele tem 3% de chance de ter um acidente no ano corrente. Para um dado ano, qual é a anualidade média paga por um cliente da Se-segura?

Estado: (X,Y) $\rightarrow$ X=1 : teve acidente no ano 1
Y=1 : teve acidente no ano 2

$$P = \begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 00 \\ \hline 0{,}97 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}97 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \end{array}$$

$$\begin{cases} \pi_{00} = 0{,}97\pi_{00} + 0{,}97\pi_{10} \\ \pi_{01} = 0{,}03\pi_{00} + 0{,}03\pi_{10} \\ \pi_{10} = 0{,}90\pi_{01} + 0{,}9\pi_{11} \\ \pi_{00} + \pi_{01} + \pi_{10} + \pi_{11} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_{00} = 0{,}9387 \\ \pi_{01} = 0{,}0290 \\ \pi_{10} = 0{,}0290 \\ \pi_{11} = 0{,}0032 \end{cases}$$

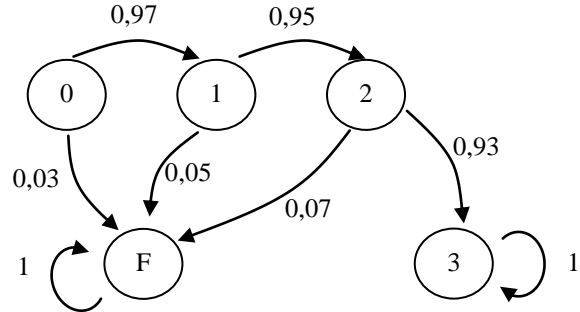
Anualidade média: \$100 π_{00} + \$400 π_{11} + \$300 (π_{01} + π_{10}) = \$112,58

20) DOFOGO é uma companhia produtora de fogões, famosos pela sua qualidade. A companhia tem uma política de 2 anos de garantia, onde ela garante a substituição de qualquer fogão que falhe durante este período. A companhia está planejando fazer uma campanha promocional onde pretende estender a garantia para três anos. Como forma deavaliar o impacto desta nova política foram coletados os seguintes dados: 3% dos fogões novos falham durante o primeiro ano de operação; 5% dos fogões com mais de um ano de uso falham durante o segundo ano de operação; 7% dos fogões com mais de dois anos de uso falham durante o terceiro ano de operação. Observe que um fogão substituído não é coberto pela garantia.

a) Use cadeias de Markov para predizer quantos fogões deverão ser repostos com a nova política.

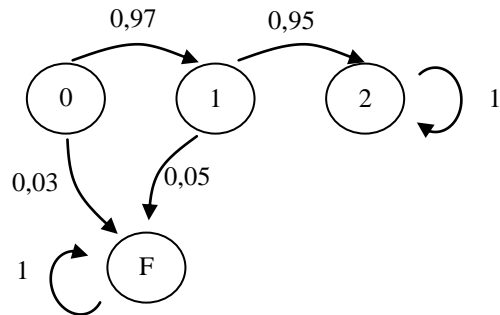
b) Supondo que o custo de repor um fogão seja de $100 e que a DOFOGO venda 10.000 fogões **por ano, qual o impacto monetário da mudança de política de garantia?**

Política de garantia de 3 anos:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0{,}97 & 0 & 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 0{,}95 & 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}93 & 0{,}07 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$A = (I-Q)^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}97 & 0{,}9275 \\ 0 & 1 & 0{,}95 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0{,}05 \\ 0{,}93 & 0{,}07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8626 & 0{,}1434 \\ 0{,}8835 & 0{,}1165 \\ 0{,}93 & 0{,}07 \end{bmatrix}$$

a) nº de fogões que deverão ser substituídos: a_{0F} = 14,34%

Política de garantia de 2 anos:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0{,}97 & 0 & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 0{,}95 & 0{,}05 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$A = (I-Q)^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}97 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0{,}03 \\ 0{,}95 & 0{,}05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9215 & 0{,}0785 \\ 0{,}95 & 0{,}05 \end{bmatrix}$$

nº de fogões que deverão ser substituídos: a_{0F} = 7,85%

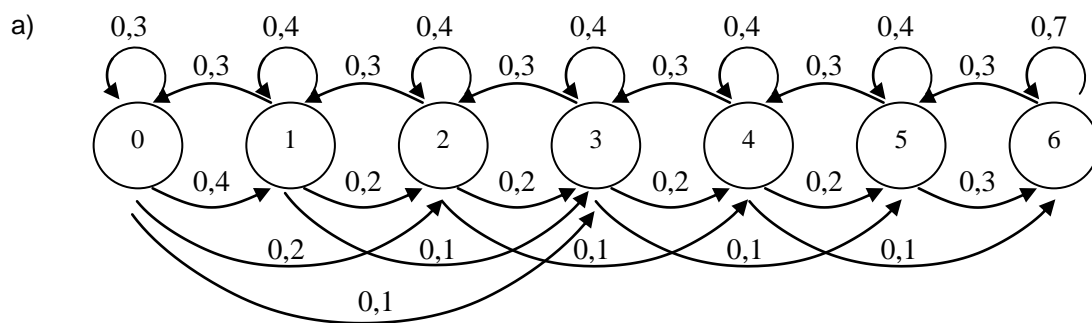
Custo com as reposições para:

política de 3 anos de garantia: 10.000 * $100 * 0,1434 = $143.400
política de 2 anos de garantia: 10.000 * $100 * 0,0785 = $78.500

b) Impacto monetário da mudança de política: $143.400 - $78.500 = $64.900

21) O proprietário de uma barbearia de uma só cadeira está pensando em expandi-la devido ao fato de haver muita gente em espera. As observações indicam que durante o período de tempo requerido para cortar o cabelo de uma pessoa, podem haver 0, 1 2 e 3 novas chegadas com probabilidade 0,3; 0,4; 0,2; 0,1; respectivamente. A cada tem capacidade fixa de 6 pessoas, incluindo aquela que estiver cortando o cabelo.

a) Desenhe o diagrama de transição de estado e determine a matriz de probabilidade de transição.
b) Determine a probabilidade que a casa esteja lotada.
c) Dado que a casa esta lotada quanto tempo demora até que ela esteja completamente vazia?

a)

Estado: nº de pessoas na barbearia no início do corte de cabelo
Estágio: período de corte do cabelo
Transição: próximo corte

P =

	0	1	2	3	4	5	6
0	0,3	0,4	0,2	0,1	0	0	0
1	0,3	0,4	0,2	0,1	0	0	0
2	0	0,3	0,4	0,2	0,1	0	0
3	0	0	0,3	0,4	0,2	0,1	0
4	0	0	0	0,3	0,4	0,2	0,1
5	0	0	0	0	0,3	0,4	0,3
6	0	0	0	0	0	0,3	0,7

b)

$$\begin{cases} \pi_0 = 0{,}3(\pi_0 + \pi_1) \\ \pi_1 = 0{,}4(\pi_0 + \pi_1) + 0{,}3\pi_2 \\ \pi_2 = 0{,}2(\pi_0 + \pi_1) + 0{,}4\pi_2 + 0{,}3\pi_3 \\ \pi_3 = 0{,}1(\pi_0 + \pi_1) + 0{,}2\pi_2 + 0{,}4\pi_3 + 0{,}3\pi_4 \\ \pi_4 = 0{,}1\pi_2 + 0{,}2\pi_3 + 0{,}4\pi_4 + 0{,}3\pi_5 \\ \pi_5 = 0{,}1\pi_3 + 0{,}2\pi_4 + 0{,}4\pi_5 + 0{,}3\pi_6 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0{,}0307 \\ \pi_1 = 0{,}0716 \\ \pi_2 = 0{,}1023 \\ \pi_3 = 0{,}1364 \\ \pi_4 = 0{,}1704 \\ \pi_5 = 0{,}2159 \\ \pi_6 = 0{,}2727 \end{cases}$$

Probabilidade da casa estar lotada: π_6 = 27,27%

c)

$$\begin{cases} m_{60} = 1 + p_{61}m_{10} + p_{62}m_{20} + p_{63}m_{30} + p_{64}m_{40} + p_{65}m_{50} + p_{66}m_{60} \\ m_{50} = 1 + p_{51}m_{10} + p_{52}m_{20} + p_{53}m_{30} + p_{54}m_{40} + p_{55}m_{50} + p_{56}m_{60} \\ m_{40} = 1 + p_{41}m_{10} + p_{42}m_{20} + p_{43}m_{30} + p_{44}m_{40} + p_{45}m_{50} + p_{46}m_{60} \\ m_{30} = 1 + p_{31}m_{10} + p_{32}m_{20} + p_{33}m_{30} + p_{34}m_{40} + p_{35}m_{50} + p_{36}m_{60} \\ m_{20} = 1 + p_{21}m_{10} + p_{22}m_{20} + p_{23}m_{30} + p_{24}m_{40} + p_{25}m_{50} + p_{26}m_{60} \\ m_{10} = 1 + p_{11}m_{10} + p_{12}m_{20} + p_{13}m_{30} + p_{14}m_{40} + p_{15}m_{50} + p_{16}m_{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{60} = 94{,}07 \\ m_{50} = 90{,}74 \\ m_{40} = 84{,}07 \\ m_{30} = 72{,}96 \\ m_{20} = 56{,}29 \\ m_{10} = 32{,}59 \end{cases}$$

Tempo médio para que a casa passe de lotada a vazia: m_{60} = 94,07 (cortes de cabelo)

22) Suponha que você conduziu uma série de testes sobre um procedimento de treinamento e verificou que a seguinte matriz de probabilidades descreve o conjunto de respostas "corretas e incorretas"

	(j+1)-ésimo teste		
j-ésimo teste		Correto	Incorreto
	Correto	0,95	0,05
	Incorreto	0,01	0,99

a) Que proporção de respostas corretas se pode esperar de um estagiário "absolutamente treinado"?
b) Que proporção de respostas corretas se pode esperar de um estagiário após quatro repetições do procedimento, caso a resposta inicial seja igualmente possível de ser correta ou incorreta?
c) Qual a probabilidade de que se obtenha, pela primeira vez, uma resposta correta, exatamente quatro tentativas após uma resposta incorreta?
d) Qual o número médio de tentativas para que se obtenha uma resposta correta após ter obtido uma resposta incorreta?

a)

0,01
0,95 Correto Incorreto 0,99
0,05

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_C = 0{,}95\pi_C + 0{,}01\pi_I \\ \pi_C + \pi_I = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \pi_C = 1/6 \\ \pi_I = 5/6 \end{cases}$$

Proporção esperada de respostas corretas de um estagiário

"absolutamente treinado": π_C= 1/6 = 16,67%

b)

$$P^4 = P^2.P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}903 & 0{,}097 \\ 0{,}0194 & 0{,}9806 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}903 & 0{,}097 \\ 0{,}0194 & 0{,}9806 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8173 & 0{,}1827 \\ 0{,}0365 & 0{,}9634 \end{bmatrix}$$

$$p^{(4)} = p^{(0)} \cdot P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}8173 & 0{,}1827 \\ 0{,}0365 & 0{,}9634 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4269 & 0{,}5731 \end{bmatrix}$$

Proporção de respostas corretas após 4 repetições: $p_C^{(4)}$ = 42,69%

c)

$$f_{IC}^{(4)} = p_{IC}^{(4)} - \sum_{k=1}^{3} f_{IC}^{(k)}.p_{CC}^{(4-k)}$$

$$\begin{cases} f_{IC}^{(1)} = p_{IC}^{(1)} = 0{,}01 \\ f_{IC}^{(2)} = p_{IC}^{(2)} - f_{IC}\, p_{CC} = 0{,}0194 - 0{,}01 \,.\, 0{,}95 = 0{,}0099 \\ f_{IC}^{(3)} = p_{IC}^{(3)} - \left(f_{IC}\;\; p_{CC}^{\;2} + f_{IC}^{\;2} p_{CC} \right) = 0{,}0282 - (0{,}01 \,.\, 0{,}903 + 0{,}0099 \,.\, 0{,}85) = 0{,}009765 \\ f_{IC}^{(4)} = p_{IC}^{(4)} - \left(f_{IC} \,.\, p_{CC}^{\;3} + f_{IC}^{\;2}\; p_{CC}^{\;2} + f_{IC}^{\;3} \,.\, p_{CC} \right) \\ \quad = 0{,}0365 - (0{,}01\; 0{,}858 + 0{,}0099\; .0{,}903 + 0{,}009765 \,.\, 0{,}95) = 0{,}009703 = 0{,}97\% \end{cases}$$

Probabilidade de se obter uma resposta correta exatamente 4 tentativas após uma resposta incorreta: $f_{IC}^{(4)}$ = 0,97%

d) $m_{IC} = 1 + p_{II}.m_{IC} = 1 + 0{,}99.m_{IC} \qquad \Rightarrow \qquad m_{IC} = 100$

nº médio de tentativas para que se obtenha uma resposta correta após ter obtido uma resposta incorreta: m_{IC} = 100 tentativas

23) Um jogador joga um "jogo limpo" no qual as chances são 2 contra 1. Em outras palavras ele tem 1/3 de probabilidade de ganhar e 2/3 de perder. Se ganhar, ganhará $2. Se perder, perderá $1. Suponha que os recursos totais do jogador e do seu oponente sejam $N. Se o capital de qualquer um dos jogadores cair abaixo do ponto em que eles pudessem pagar caso perdessem o jogo seguinte o jogo termina.

a) Desenhe o diagrama de transição de estados e determine a matriz de transição.
b) Suponha que os dois jogadores concordem em que se o capital de qualquer dos dois cair para $1, eles farão o próximo jogo com chances iguais – ganharão ou

perderão $1, com igual probabilidade. Desenhe o diagrama de transição de estados e determine a matriz de transição para este caso.
c) No caso descrito na letra (b) suponha que o jogador 1 tem $3 e o jogador 2 tem $2, qual a probabilidade do jogador 1 ganhar o jogo ?
d) Quantas jogadas durará o jogo?

a)

Jogador 1 ganha $2 com probabilidade 1/3
perde $1 com probabilidade 2/3

P =

	1	2	3	4	...	N-3	N-2	N-1	F	0
1	0	0	1/3	0	...	0	0	0	0	2/3
2	2/3	0	0	1/3	...	0	0	0	0	0
3	0	2/3	0	0	...	0	0	0	0	0
4	0	0	2/3	0	...	0	0	0	0	0
...		....								
N-3	0	0	0	0	...	0	0	1/3	0	0
N-2	0	0	0	0	...	2/3	0	0	1/3	0
N-1	0	0	0	0	...	0	2/3	0	1/3	0
F	0	0	0	0	...	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	1

b)

P =

	1	2	3	4	...	N-3	N-2	N-1	N	0
1	0	1/2	0	0	...	0	0	0	0	1/2
2	2/3	0	0	1/3	...	0	0	0	0	0
3	0	2/3	0	0	...	0	0	0	0	0
4	0	0	2/3	0	...	0	0	0	0	0
...		....								
N-3	0	0	0	0	...	0	0	1/3	0	0
N-2	0	0	0	0	...	2/3	0	0	1/3	0
N-1	0	0	0	0	...	0	1/2	0	1/2	0
N	0	0	0	0	...	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	1

c)

P =

	1	2	3	4	5	0
1	0	1/2	0	0	0	1/2
2	2/3	0	0	1/3	0	0
3	0	2/3	0	0	1/3	0
4	0	0	1/2	0	1/2	0
5	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1

$E = (I-Q)^{-1}$ =

	1	2	3	4
1	1,6	0,9	0,15	0,3
2	1,2	1,8	0,3	0,6
3	0,8	1,2	1,2	0,4
4	0,4	0,6	0,6	1,2

A = E. R =

	5	0
1	0,2	0,8
2	0,4	0,6
3	0,6	0,4
4	0,8	0,2

Probabilidade do jogador 1 ganhar, dado que começou com $3: a_{30} = 60%

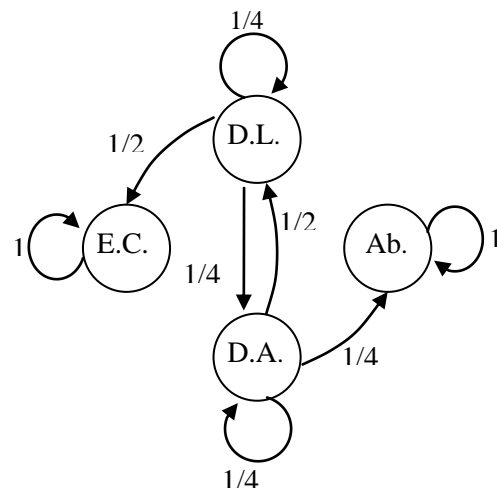
d) d3 = duração média do jogo (regime transiente) dado estado inicial 3

$d_3 = \Sigma_j e_{3j} = 0,8 + 1,2 + 1,2 + 0,4 = 3,6$ jogadas

24) ***Perfura-se um poço e, à medida que a perfuração avança, uma série de perfis são realizados. Suponha que o poço possa ser classificado em quatro estados, rotulados como se segue: Em curso; Com desvio ligeiro, Com desvio acentuado, Abandonado (por estar tão fora de curso, que não se consegue mais atingir o alvo). Suponha ainda que X_n represente o estado do sistema após a n-ésima correção de curso e que o comportamento do poço possa ser modelado por uma cadeia de Markov, com a seguinte matriz de probabilidade de transição:***

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) ***Se o poço começou com um desvio ligeiro, qual a probabilidade de que ele eventualmente entre em curso?***
b) Se o poço tem chances iguais de começar com desvio ligeiro e acentuado, qual a probabilidade de que ele eventualmente entre em curso?

$$P = \begin{array}{c} \\ D.L. \\ D.A. \\ E.C. \\ Ab. \end{array} \begin{array}{cccc} D.L. & D.A. & E.C. & Ab. \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

c) Qual o número médio de perfis se poderá obter deste poço?

$$E = (I-Q)^{-1} = \begin{array}{c} \\ D.L. \\ D.A \end{array} \begin{array}{cc} D.L. & D.A \\ 1{,}7143 & 0{,}5714 \\ 1{,}1428 & 1{,}7143 \end{array}$$

$$A = E.R = \begin{array}{c} \\ D.L. \\ D.A \end{array} \begin{array}{cc} E.C. & Ab. \\ 0{,}857 & 0{,}143 \\ 0{,}571 & 0{,}429 \end{array}$$

a) Dado que no início o poço tinha um desvio ligeiro, a probabilidade de ele entrar em curso (ser absorvido por E.C.) é: $a_{DL,EC} = 0{,}857$

b) Probabilidade de o poço entrar em curso, dado que tem chances iguais de começar com desvio ligeiro ou acentuado: 0,5 x 0,857 + 0,5 x 0,571 = 0,4285 + 0,2855 = 0,714

c) d_i = duração média do regime transiente da estado inicial i = nº médio de perfis dado estado inicial i

$d_{D.L.}$ = 1,7143 + 0,5714 = 2,2857 perfis
$d_{D.A}$ = 1,1428 + 1,7143 = 2,8571 perfis

Como probabilidade de começar com um desvio ligeiro ou acentuado é igual, o número médio de perfis é: (2,2857 + 2,8571) / 2 = 2,57 perfis.

25) Na teoria de análise de crédito, determinados autores verificaram que a estimativa dos valores considerados como devedores duvidosos costuma seguir dois passos básicos descritos a seguir: Classificam-se as contas por idade, que refletem o estado em que a conta se encontra: um mês de atraso, dois meses de atraso, etc.... .
Estima-se uma expectativa de perda para cada estado, geralmente com base na política da empresa, situação econômica-financeira do cliente e outros fatores relevantes para a análise do crédito. O segundo tópico merece uma análise mais detalhada, sendo que atualmente diversos métodos, principalmente na área de econometria, estão sendo desenvolvidos. Entretanto, é possível desenvolver um método para estimar a probabilidade de devedores duvidosos, com base nas Cadeias de Markov, através do atraso e da inadimplência existente para uma determinada carteira de crédito de uma instituição financeira. Se em uma determinada data fizermos um levantamento de uma carteira de crédito, poderemos facilmente verificar os seguintes estados das contas em carteira:

A_0 = valores a serem recebidos que ainda não venceram, ou seja, estão em dia ou com 0 (zero) meses de atraso;
A_1 = valores a serem recebidos que estão com 1 mês de atraso;
....
A_j = valores a serem recebidos que estão com j meses de atraso;
....
A_n = valores a serem recebidos que estão com n meses de atraso;

Essa disposição corresponde a uma classificação da idade das contas a receber, sendo o estado A_0 a conta que está em dia, A_1 a conta com um mês de atraso, e assim por diante. A_n é a situação dos considerados incobráveis. Na prática o número de idades das contas pode variar de instituição para instituição ou por categorias de crédito, tais como crédito imobiliário, leasing, financiamentos diretos ao consumidor e qualquer outro tipo de operação de crédito. Se considerarmos um levantamento de contas a receber provenientes do período i para o período seguinte i + 1, que denominaremos de j , a conta poderá ser classificada com relação a esses dois índices, o período anterior e o período em que se encontra no momento atual. De forma geral, teremos A_{jk} igual ao levantamento da categoria k no tempo i + 1, o qual é proveniente da categoria j no tempo i. Para considerarmos todas as possíveis

categorias devemos acrescentar mais uma categoria àquelas descritas anteriormente. Trata-se da categoria correspondente aos títulos classificados como pagos, que serão descritos como“Pag”. Valores classificados em qualquer categoria no período i podem mover-se para a categoria dos títulos pagos ou para qualquer outra categoria de 0 a n no período i + 1. Iremos adotar os procedimentos recomendados pelo Banco Central do ***Brasil, através da resolução 2.682, que determina que os créditos vencidos há mais de 60 (sessenta) dias, sem garantias, sejam transferidos para as contas de Créditos em Liquidação.***

Em 1º de março foi levantada uma amostra de 1050 contas, e em 31 de março foi verificado o comportamento dessas contas:

De 01/03 a 31/03	***Integ. Pg***	***Em dia***	***Atraso –1 mês***	***Atraso – 2 meses***	***Perda***	***Total***
Emitidas até 28/02	***150***	***100***	***150***	***0***	***0***	***400***
Emitidas até 31/01	***120***	***90***	***90***	***150***	***0***	***450***
Emitidas até 31/12	***30***	***40***	***40***	***60***	***30***	***200***

A primeira linha significa que, das faturas emitidas no mês de fevereiro, num total de 400, 150 foram pagas, 100 ainda não venceram e 150 venceram e não foram pagas, contando o atraso de um mês. A segunda linha mostra que, de 450 faturas emitidas no mês de janeiro, 120 foram pagas, 90 ainda não venceram, 90 apresentam atraso de um mês e 150 com atraso de dois meses. Finalmente, a última linha mostra que, de 200 faturas emitidas no mês de dezembro, além da seqüência de pagamentos e atrasos, 30 correspondem à perda, ou seja, atraso superior a 2 meses.

Seja uma carteira de crédito total de R$ 1.000.000,00, conforme mostramos a seguir:

Situação da Carteira	***Valor (R$)***
Contas em dia	***800.000***
Contas com atraso de 1 mês	***120.000***
Contas com atraso de 2 meses	***80.000***
Valor da carteira	***1.000.000***

Calcule o valor esperado que será pago.

Ajustando as quantidades para vetores de probabilidades; considerando as faturas pagas (Pag) e perdas (A_n) como estados absorventes; e, transpondo a coluna de faturas pagas, podemos gerar a seguinte matriz de transição:

$$
P = \begin{array}{c|ccc:cc|}
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_n & Pag \\
\hline
A_0 & 100/400 & 150/400 & 0 & 0 & 150/400 \\
A_1 & 90/450 & 90/450 & 150/450 & 0 & 120/450 \\
A_2 & 40/200 & 40/200 & 60/200 & 30/200 & 30/200 \\
\hdashline
A_n & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
Pag & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

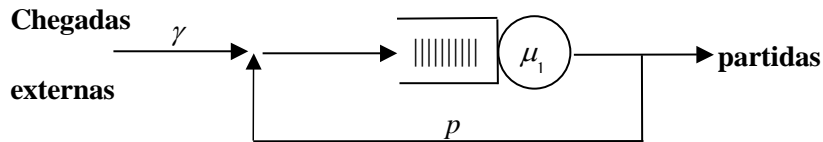
$$P = \begin{array}{c} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_n \\ Pag \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_n & Pag \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cc} 0,25 & 0,375 & 0 & 0 & 0,375 \\ 0,2 & 0,2 & 0,333 & 0 & 0,267 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,15 & 0,15 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$E = (I-Q)^{-1} = \begin{array}{c} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0,75 & -0,375 & 0 \\ -0,2 & 0,8 & -0,333 \\ -0,2 & -0,2 & 0,7 \end{array}\right]^{-1} \end{array} = \begin{array}{c} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1,687 & 0,897 & 0,427 \\ 0,706 & 1,795 & 0,855 \\ 0,684 & 0,769 & 1,795 \end{array}\right] \end{array}$$

$$A = E.R = \begin{array}{c} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_n & Pag \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0,064 & 0,936 \\ 0,128 & 0,872 \\ 0,269 & 0,731 \end{array}\right] \end{array}$$

Valor esperado a ser pago: $a_{A0,Pag}$ 800.000 + $a_{A1,Pag}$ 120.000 + $a_{A2,Pag}$ 80.000 = $911.920

6. LISTA DE EXERCICIOS RESOLVIDOS DE TEORIA DAS FILAS

1) ***Considere a rede de filas aberta com um único nó, como mostrada abaixo.***

O nó único é uma fila M/M/1 com taxa de serviço μ. Um freguês retorna ao nó com probabilidade p depois de completar seu serviço. A disciplina da fila é PEPS (primeiro a chegar primeiro a ser servido). Pergunta-se:

(c) Quanto vale γ = taxa total de chegada ao nó 1?

(d) Qual é o intervalo permitido para variação de p para que o sistema permaneça estável?

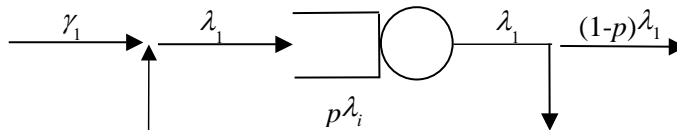
1º iteração γ

2º $\gamma + \gamma p$

3º $\gamma + \gamma p + \gamma p^2$

nº $\gamma + \gamma p + \gamma p^2 + \gamma p^3 + \dots + \gamma p^{n-1}$

$n \to \infty$

a)

$$\lambda_1 = \gamma_1 + p\lambda_1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\gamma_1}{1-p}$$

b)

Condição $\quad 0 \le P_1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{\lambda_1}{\mu_1} < 1$

$$0 \le \frac{\gamma_1}{\mu_1(1-p)} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{\gamma_1}{\mu_1} < 1 - p$$

$$0 \le p < 1 - \frac{\gamma_1}{\mu_1}$$

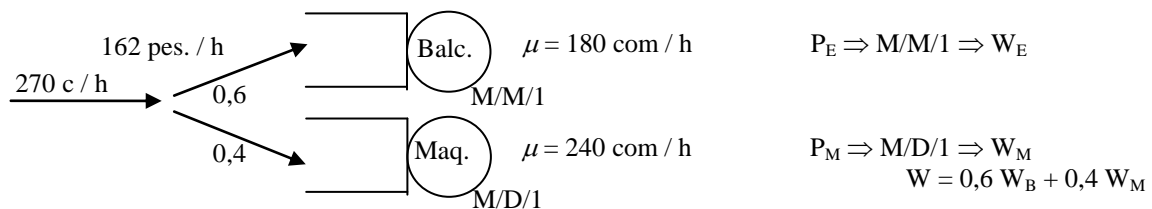
2) ***No bar de um aeroporto, uma pessoa pode escolher entre tomar um café servido no balcão, ou então usar uma máquina automática. No balcão só podem ser atendidos, em média, 180 pessoa por hora, enquanto a máquina pode atender exatamente 4 pessoas por minuto. A cada hora, 270 pessoas, em média, procuram o bar para tomar café; a probabilidade de uma pessoa preferir o balcão é de 0,6. Qual a demora média de uma pessoa que procura o bar, desde que entra até ser servida de café?***

162 pes. / h

270 c / h

0,6 → Balc. — μ = 180 com / h — M/M/1 — $P_E \Rightarrow$ M/M/1 $\Rightarrow W_E$

0,4 → Maq. — μ = 240 com / h — M/D/1 — $P_M \Rightarrow$ M/D/1 $\Rightarrow W_M$

$W = 0{,}6\ W_B + 0{,}4\ W_M$

$$\text{Balcão}: W_B = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{180-162} = 0{,}0555h = 3 \text{ minutos } 20 \text{ segundos}$$

$$\text{Máquina}: L_q \to L \to W \qquad M/D/1: \rho = \frac{108}{240} = 0{,}45$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{0{,}45^2}{2(1-0{,}45)} = 0{,}184 \text{ pessoas}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}184 + 0{,}45 = 0{,}634$$

$$W_M = \frac{L}{\lambda} = 0{,}00587 \text{ horas} \cong 21 \text{ segundos}$$

$$W = 0{,}6 * 0{,}0555 + 0{,}4 * 0{,}00587 = 0{,}0357 \text{ horas}$$

$$W \cong 2 \text{ minutos } 8 \text{ segundos}$$

3) ***Uma frota de traineiras consome gelo para conservar o peixe durante o tempo passado no mar. O gelo vem em camionetas que transportam 1 tonelada cada (50 barras) e que, no dia da entrega, chegam à razão de 5 por hora, em média. O pessoal encarregado da descarga tira 1 barra a cada 12 segundos em média. O gelo custa $20 a tonelada e, no verão, a perda devida ao derretimento é de cerca de 1 quilo por minuto e por tonelada de gelo. Qual o custo esperado do gelo que chega a ser embarcado?***

λ . 5 camionete / hora

Modelo: chegada em grupo →M/S_{SO} /1

$$\frac{1}{K\mu} = 12 \text{ segundos / hora} \quad \Rightarrow \quad \mu = 6 \text{ camionete} \quad (\text{comprar com M/D/1})$$

$$L_q = \frac{1+K}{2K} \; \frac{\rho^2}{(1-\rho)} \;=\; \frac{51}{100} \; \frac{(5/6)^2}{(1-5/6)} \;=\; \frac{51}{24} \;\Rightarrow\; L = \frac{51}{24} + \frac{5}{6} = \frac{71}{24} \text{ ton.}$$

$$W = \frac{71/24}{5} \;\Rightarrow\; W = \frac{71}{120}(\text{hora}) / \text{perda} = \frac{1Kg}{min.} * \frac{60\,min.}{h} * W(h) * \frac{20\,u.m}{1.000\,Kg} = 710\; u.m$$

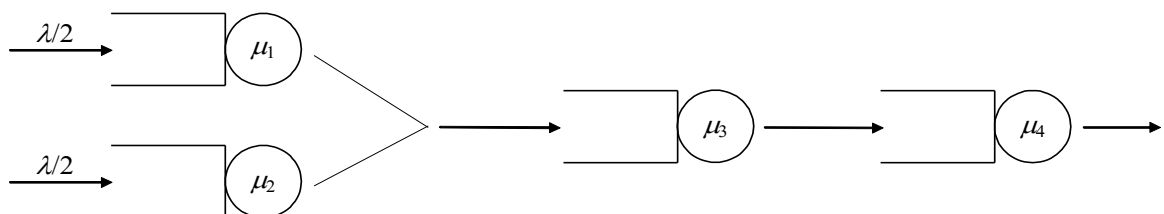
R$ 20,74 ton.

4) ***Seja a rede de filas abaixo, onde todos os sistemas de filas são M/M/1. Determine:***

a. ***Qual o gargalo do sistema?***
b. ***Qual a máxima taxa de chegadas externas admissível?***
c. ***Qual o número esperado de clientes em todo o sistema para uma taxa de chegadas externas igual a 75% da taxa calculada em (b)?***
d. ***Suponha que a taxa calculada em (b) tenha sido ultrapassada, qual o novo gargalo do sistema?***
e. ***Se os sistemas de filas fossem M/G/1, o que mudaria nas respostas anteriores (a) até (d)?***

Dados: $\mu_1 = \mu_2 = 15$ clientes/hora, $\mu_3 = 20$ clientes/hora, $\mu_4 = 25$ clientes/hora.

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{2\mu_1} = \frac{\lambda}{30} \qquad \rho_3 = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{20} & p/\;\; \lambda < 30 \\[2mm] \dfrac{30}{20} & p/\;\; \lambda \geq 30 \end{cases}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu_1} = \frac{\lambda}{30} \qquad \rho_4 = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{25} & p/\;\; \lambda < 20 \\[2mm] \dfrac{20}{25} & p/\;\; \lambda \geq 20 \end{cases}$$

a) Logo o gargalo do sistema é a fila 3

b) λ = 20 clientes / hora

c) $\lambda = 15 \text{ clientes/hora} \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = \frac{15}{30} = \quad \rho_3 = 0{,}75 \quad \rho_4 = 0{,}6$

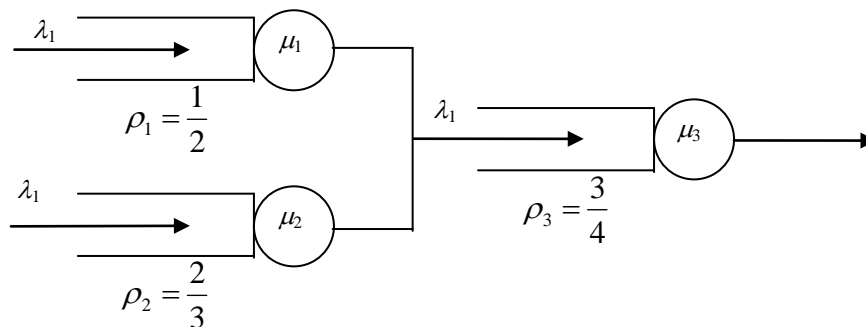
$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{filas 1 } e \text{ 2} \quad L_1 = L_2 = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \quad L_3 = \frac{0{,}75}{0{,}25} = 3 \quad L_4 = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5$$

Logo no sistema todo haverá 1+1+3+1,5 = 6,5 clientes

d) As filas 1 e 2 pois a taxa de chegada na fila 4 ficará sempre limitada pela taxa μ_3.

e) Respostas A, B, e D transparecem inalteradas.

Não é possível calcular o nº. total de clientes na rede com as fórmulas conhecidas pois o teorema de Burke não é mais válido.

5) ***Seja a rede de filas markovianas esquematizada abaixo.***

Se λ_1 = 10 clientes/hora, λ_2 = 20 clientes/hora, μ_1 = 20 clientes/hora, μ_2 = 30 clientes/hora, μ_3 = 40 clientes/hora.

a. ***Determine o gargalo do sistema (isto é, a pior fila).***

b. ***Qual a probabilidade de todo o sistema estar ocioso?***

c. ***Qual a probabilidade de existir uma única pessoa no sistema?***

b) $P_0 = P_0^1 . P_0^2 . P_0^3 = (1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 4\%$

c) $P_1 = P_1^1 P_0^2 P_0^3 + P_0^1 P_1^2 P_0^3 + P_0^1 P_0^2 P_1^3 = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3} . \frac{1}{4} + \frac{1}{2} . \left(\frac{1}{3} . \frac{2}{3}\right)\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} . \left(\frac{3}{4}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{48} + \frac{1}{36} + \frac{1}{32} = 8\%$

a) Fila 3

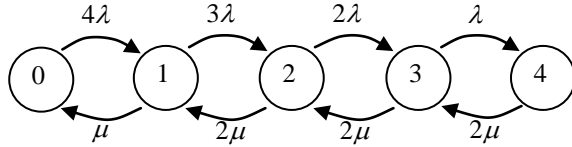
6) ***Em um laboratório de computação gráfica da universidade existem 4 estações de trabalho, cada uma delas com um tempo entre falhas exponencialmente distribuído com média de 40 (50) dias. O laboratório tem um contrato com o fornecedor, que permite que até duas das estações sejam reparadas simultaneamente, quando da ocorrência de defeitos. O tempo de reparo de cada estação pode ser considerado exponencialmente distribuído com duração média de 10 dias. Desenvolva um modelo de filas para representar o problema e obtenha:***

a. ***o diagrama de transição de estados.***

b. ***as equações de equilíbrio e de recorrência.***

c. ***o número médio de estações em operação normal.***

d. ***a percentagem do tempo em que todas as estações estão paradas.***

a)

$$4\lambda \, .p_0 = \mu \, p_1$$
$$4\lambda \, p_0 + 2\mu \, p_2 = \mu \, p_1 + 3\lambda \; p_1$$
$$3\lambda \, p_1 + 2\mu \, p_3 = 2\mu \, p_2 + 2\lambda \, p_2$$
$$2\lambda \, p_2 + 2\mu \, p_4 = 2\mu \, p_3 + \lambda \; p_3$$

b)

$$p_1 = \frac{4\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \frac{3\lambda}{2\mu} p_1 = 6\frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{4}$$

$$p_3 = \frac{2\lambda}{2\mu} p_2 = 6\frac{\lambda^3}{\mu^3} p_0$$

$$p_4 = \frac{\lambda}{2\mu} p_3 = 3\frac{\lambda^4}{\mu^4} p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 4\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3 + 3\rho^4} = 0{,}4032$$

c)

$$\overline{L} = \sum_{n=1}^{4} n \; p_n = 4\rho \, p_0 + 12\rho^2 p_0 + 18\rho^3 p_0 + 12\rho^4 p_0 = \frac{4\rho + 12\rho^2 + 18\rho^3 + 12\rho^4}{1 + 4\rho + 6\rho^2 + 6\rho^3 + 3\rho^4}$$

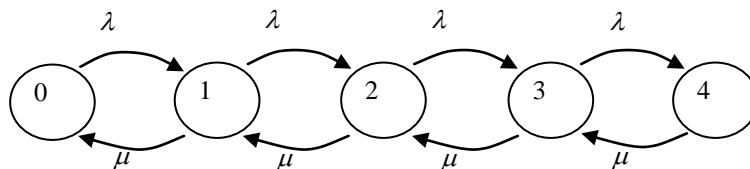
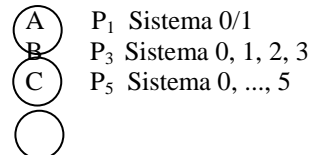
$$\overline{L} = 1{,}8360 \qquad \text{resposta} = 4 - 1{,}8360 = 2{,}16 \, \text{máquina}$$

d)

$$p_4 = 3\rho^4 p_0 = 0{,}79\%$$

7) ***Estão sendo feitos planos para a abertura de um posto de lavagem de carros pequeno, e tem que ser decidido quanto espaço para carros a espera. É estimado que os clientes chegariam aleatoriamente (i.e. segundo um processo de chegadas Poisson), com uma taxa média de um a cada 4 minutos, a menos que a área de carros a espera esteja lotada, em cujo caso o cliente levaria seu carro a outro lugar.***

O tempo que pode ser atribuído à lavagem de um carro tem uma distribuição exponencial com uma média de 3 minutos. Compare a fração de clientes potenciais que seria perdida por causa de espaço de espera inadequado se (a) zero, (b) dois ou (c) quatro espaços (não incluindo o carro que está sendo lavado) fossem previstos. (Obs.: Desenvolva a partir do diagrama de transição de estados as expressões necessárias para a solução do problema.)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\lambda} = 4 \rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\mu} = 3 \rightarrow \mu = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \quad \rho = \frac{3}{4}$$

Cliente perdido = clientes que chegam quando o sistema está cheio.

a) $$\lambda\, p_0 = \mu\, p_1 \;\Rightarrow\; p_0 = \frac{\mu}{\lambda}\, p_1 \qquad P_0 + p_1 = 1 \;\Rightarrow \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) P_1 = 1$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3}{7}, \text{ i e} \qquad (42,86\% \text{ dos clientes potenciais desistem})$$

b) 0 $\lambda\, p_0 = \mu\, p_1$ $\qquad P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\, p_0$

1 $\lambda\, p_0 + \mu\, p_2 = \mu\, p_1 + \lambda\, p_1$ $\qquad P_2 = \dfrac{\lambda}{\mu}\, p_1 = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2}\, p_0$

2 $\lambda\, p_0 + \mu\, p_2 = \mu\, p_1 + \lambda\, p_1$ $\qquad P_3 = \dfrac{\lambda}{\mu}\, p_1 = \dfrac{\lambda^3}{\mu^3}\, p_0$

3 $\lambda\, p_2 = \mu\, p_3$ $\qquad P_0\left(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3\right) = 1 \Rightarrow p_0 = 0{,}3657$

$$P_0\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64}\right) = 1 \qquad p_3 = \frac{27}{64}\,.\,0{,}3657$$

$$P_3 = 0{,}1543 \Rightarrow \text{i e } 15{,}43\% \text{ são perdidos}$$

c) $\quad P_n = \rho^n . p_0 \qquad n = 0, \ldots, 5 \qquad p_0 = \left\{\sum_{n=0}^{5} \rho^n\right\}^{-1} = 0{,}3041 \Rightarrow P_5 = \dfrac{243}{1024}\,.\,0{,}3041$

$$P_5 = 0{,}0722 \text{ i e } 7{,}22\% \text{ são perdidos}$$

8) ***Uma empresa de ônibus envia seus ônibus para manutenção de rotina a cada 25.000 Km. A garagem fica aberta 24 horas por dia é atendida por um único funcionário o qual é capaz de revisar um ônibus de cada vez. O tempo que ele gasta é exponencialmente distribuído, com uma média de 4 horas. Os ônibus chegam à garagem segundo um processo de Poisson, a uma taxa média de 12 por dia. Os motoristas, entretanto, são instruídos a não entrar na garagem se lá já existirem quatro ou mais ônibus, mas retornar ao despachante para nova autorização. Determine:***

a. ***o valor esperado de tempo que um ônibus aguarda na garagem;***

b. ***a perda esperada de dinheiro por dia pela companhia devido à capacidade limitada da garagem, se o custo de enviar um ônibus a ela e tê-lo de volta sem revisar é $80.***

$$P_0 = \frac{\lambda}{\mu} p_1$$

$$P_n = \rho^n . p_0$$

$$p_0 \left(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4\right) = 1$$

$$p_0 \left(1 + 2 + 4 + 8 + 16\right) = 1 \;\Rightarrow\; p_0 = \frac{1}{31}$$

$$p_0 = \frac{1}{31} \;;\; p_1 = \frac{2}{31} \;;\; p_2 = \frac{4}{31} \;;\; p_3 = \frac{8}{31} \;;\; p_4 = \frac{1}{31}$$

$$\frac{1}{\mu} = 4 \text{ horas} \;\Rightarrow\; \mu = 6 \text{ ônibus / dia}$$

$$\lambda = 12 \text{ ônibus/dia}$$

a) $L = \sum n.P_n \qquad 0.\frac{16}{31} + 1.\frac{2}{31} + 2.\frac{4}{31} + 3.\frac{8}{31} + 4.\frac{16}{31} = \frac{2+8+12+64}{31} = \frac{86}{31}$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{86}{31 \cdot 12} = 0{,}23 \text{ dias} = 5{,}55 \text{ horas}$$

b) $\text{Perda} = \lambda \,.\, p_4 \cdot \text{custo} = 12 \frac{\text{ônibus}}{\text{dia}} \cdot \frac{16}{31} \cdot 80 = 495{,}48 \text{ / dia}$

9) ***Suponha que todos os proprietários de carros completem seus tanques quando o nível atinge exatamente a metade. Normalmente, uma média de 7,5 clientes por hora se dirigia a um posto de gasolina com uma única bomba. O tempo médio de atendimento é de 4 minutos. Com a greve dos caminhoneiros, ocorrida a pouco tempo, um certo pânico se instalou. Para modelar este fenômeno suponha que os proprietários passaram a completar o tanque quando o nível está em 3/4 do tanque. Como cada proprietário está colocando menos gasolina no tanque, durante uma visita ao posto, assuma que o tempo médio de serviço tenha caído para 3 1/2 minutos. Como o pânico afeta L e W?***

$\lambda_1 = 7,5$ cl/h

$\frac{1}{\mu} = 4\,\text{min.} \rightarrow \mu_1 = 15$ cl/h

$L_1 = 1$

$W_1 = 7,89\,\text{min.}$

$\lambda_2 = 15$ cl/h $\qquad 7,5$ cl/h $\rightarrow \frac{1}{2}$ tanque

15 cl/h $\leftarrow \frac{1}{4}$ tanque

$\frac{1}{\mu_2} = 3,5$ min $\rightarrow \mu_2 = 17,15$ cl/h

$L = 5$ carros

$W = 20$ min.

10) ***Mecânicos que trabalham no Centro Automotivo Classe A devem retirar as ferramentas e peças que necessitam de uma ferramentaria. Uma média de 10 mecânicos por hora chegam procurando por peças. Atualmente a ferramentaria possui um ferramenteiro, que recebe $6,00 por hora e que leva em média 5 minutos para atender a cada pedido. É estimado que cada mecânica produz $10,00 de serviços por hora, cada hora que o mecânico gasta na ferramentaria custa a oficina $10,00. A oficina está analisando a possibilidade de contratar um ajudante de ferramenteiro (a $4,00 por hora). Se este ajudante for contratado o ferramenteiro terá possibilidade de atender a uma requisição em 4 minutos, em média. Assuma que os tempos entre chegadas e de serviço são exponenciais. Deve o ajudante ser contratado?***

$\lambda = 10$ mec./hora

$\mu_1 = 12$ ped./hora

$\mu_2 = 15$ ped./hora

$$FO_2 = \frac{\$10}{\text{h}} \lambda\, W_1 \left(\frac{\text{mec.}}{\text{h}}\right) + \$6,00/\text{h} \quad (\$/\text{h})$$

$$FO_2 = \$10\,\lambda\, W_2 + \$10,00 \qquad (\$/\text{h})$$

$$\lambda\, W_1 = L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\frac{10}{15}}{\frac{2}{12}} = 5$$

$$\lambda\, W_2 = L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{\frac{10}{15}}{\frac{5}{15}} = 2$$

$$FO_1 = 10.2 + 6 = \$56/\text{h}$$

$$FO_2 = 10.2 + 10 = \$30/\text{h}$$

11) ***Modele, usando teoria de filas, um sistema em que o serviço , tomar sol na praia. Considere que as chegadas a praia seguem um processo Poisson de taxa λ, e que o tempo que cada pessoa passa na praia , aleatório, podendo ser aproximado por uma distribuição exponencial com média $1/\mu$.***

a. Desenhe o diagrama de transição de estados

b. Obtenha as equações de recorrência

c. Calcule P_n (sugestão $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$).

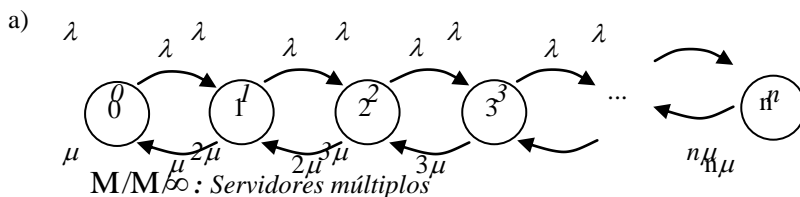
d. Obtenha: L, L_q, W, W_q

a)

λ λ λ λ λ

0 1 2 3 ... n

μ 2μ 3μ $n\mu$

M/M/∞ *: Servidores múltiplos*

Onde:
n –número de pessoas na praia
λ - Taxa média de chegada
$n\mu$ - Taxa média de pessoas na praia

b) ***0)*** $\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

(1) $\lambda p_1 = 2\mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} p_0$

(2) $\lambda p_2 = 3\mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0$

.
.
.

(n) $\lambda p_{n-1} = n\mu p_n \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$p_0 (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + ...) = 1$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Logo $p_0 e^{\rho} = 1 \therefore p_0 = \frac{1}{e^{\rho}} \therefore p_0 = e^{-\rho}$

c) $p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 \therefore p_n = \frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!} \qquad n \geq 0$

d) $L = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \rho^n e^{-\rho}}{n!}$

12) ***Análises anteriores indicam que a chegada de clientes em uma dada agência dos correios segue uma distribuição exponencial com média de 30 chegadas por hora. Você esta fazendo um levantamento na agência e na presente hora, já decorridos 15 min., já chegaram 10 clientes. Quantos clientes você espera que ainda cheguem na presente hora? Justifique.***

$\lambda = 30 \text{ chegadas / hora}$

$t = 15 \text{ minutos} = \frac{15}{60} = 0{,}25 \rightarrow 10 \text{ clientes}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{30} h = 2 \text{ minutos} \rightarrow \text{tempo entre chegadas}$

$\lambda = 30 \cdot \frac{45}{60} = 22{,}5 \text{ chegadas} \rightarrow \text{processo de Poisson}$

13) ***A ocupação média de uma lanchonete de "fast-food" é de 50 pessoas. Sabe-se que chegam a lanchonete 100 pessoas/hora e que em média uma pessoa demora 20' para fazer sua refeição.***

a. ***Quanto tempo demora um cliente dentro da lanchonete?***

b. ***Qual a percentagem deste tempo é gasta na fila?***

$$\lambda = 100 \text{ pessoas / hora}$$
$$\mu = 1 \text{ pessoa / 20 min} = 3 \text{ pessoas / hora}$$
$$L = 50 \text{ pessoas}$$
$$W = ?$$

$$\text{a) } L = \lambda W \;\therefore\; W = \frac{L}{\lambda} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ horas} = 30 \text{ minutos}$$
$$\text{b) } W_q = ?$$
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \;\therefore\; W_q = W - \frac{1}{\mu} \;\therefore\; W_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 10 \text{ minutos}$$
$$30 \text{ min} \;-\; 100\%$$
$$10 \text{ min} \;-\; x$$
$$x = 33{,}3\%$$

14) ***Um número indeterminado de duplas de alpinistas se dirige a uma montanha com o intuito de escalá-la. Na base do lance inicia da escalada há um platô onde só cabem dois alpinistas e o caminho até este platô é estreito e íngreme. Um dos guias do grupo esta na entrada deste caminho, orientando a subida para o platô. De lá ele não pode ver nem ouvir o que se passa em cima; mas baseado na experiência, procura evitar que mais de uma dupla esteja esperando na base do lance, dada a falta de espaço. Ele sabe que o lance consome, em média 12 minutos de cada dupla; se ela deseja que o platô fique sem superlotação em 84% dos casos, quantos alpinistas ele deve encaminhar em média, por hora, para lá?***

$$\mu = \frac{1}{12 \text{ min}} = 5 \text{duplas / hora}$$
$$p_0 + p_1 = 0{,}84$$
$$(1-\rho) + (1-\rho)\rho = 0{,}84 \Rightarrow 1 - \rho^2 = 0{,}84 \Rightarrow \rho^2 = 0{,}16 \Rightarrow \rho = 0{,}40$$
$$\lambda = ?$$
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \;\therefore\; \lambda = 0{,}4 \cdot 5 \;\therefore\; \lambda = 2 \text{ duplas / hora} \;\therefore\; 4 \text{ alpinistas / hora}$$

15) ***Um reator nuclear é usado para a produção de radioisótopos de uso medicinal. Um deles de meia vida particularmente curta, tem uma demanda de 3 doses por semana, em média; se uma dose for guardada por mais de 2 semanas em média, ela se tornará fraca demais para ser usada.***

c. Qual será a produção anual esperada, nestas circunstâncias?

d. Qual será o valor esperado do número de unidades em estoque?

$\mu = 3 \text{ doses / semana}$

$a) W = 2 \text{ semanas}$

$\lambda = ?$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \therefore 2(3-\lambda) = 1 \therefore \lambda = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ doses / semana}$$

$b) L_q = ?$

$L_q = \lambda W_q$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{2{,}5/3}{3(1-\frac{2{,}5}{3})} = \frac{5}{3}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \lambda W_q = 2{,}5 \cdot \frac{5}{3} = 4{,}17 \text{doses}$$

16) ***Uma agência de caderneta de poupança tem k guichês, cada um dos quais pode atender, em média, a 180 pessoas por hora. Em um certo dia, a demanda média pelos serviços da agência é de 440 pessoas por hora. Os guichês estão dispostos em uma linha perpendicular à entrada; isto faz com que muitas pessoas entrem na primeira fila que encontram; sem procurar verificar se existe ou não outra fila menor. Estima-se que a probabilidade de uma pessoa entrar na fila i é de (2/k).((k+1-i)/(k+1)). Suponha que k = 4 e responda:***

(a) qual o tempo médio gasto por uma pessoa que entrou na primeira fila?
(b) qual a fração do tempo desocupado do caixa da fila 4 ?

$$\mu = 180 \text{ pessoas / hora}$$

$$\lambda = 440 \text{ pessoas / hora}$$

$$p_i = \frac{2}{k}\frac{(k+1-i)}{(k+1)} \text{ onde } k = 4$$

$$p_i = \frac{2}{4}\frac{(5-i)}{5}$$

a) $W = ?$

$$\lambda_1 = \lambda p_1 = 440 \cdot \frac{2}{5} = 176$$

$$W_1 = \frac{1}{\mu - \lambda_1} = \frac{1}{180-176} = 0{,}25 \text{ hora} = 15 \text{ minutos}$$

$$\text{b) ociosidade} = 1 - \rho_4 = 1 - \frac{44}{180} = 0{,}756 = 75{,}6\%$$

$$\lambda_4 = \lambda p_4 = 440 \cdot \frac{1}{10} = 44$$

$$\rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu} = \frac{44}{180}$$

17) ***A e B são duas máquinas de operação manual em uma linha de produção; as peças processadas por A saem dela à razão de 10 por hora em média e são processadas em seguida por B à razão de 12 por hora em média. Dado o espaço entre A e B, haverá congestionamento da linha sempre que existam mais de 2 peças à espera do processamento. Qual a fração esperada do tempo de funcionamento da linha, relativa a ocorrência de congestionamento ?***

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2} \text{hora}$$

$$\text{Congestionamento} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) =$$

$$= 1 - (1 - \rho + \rho - \rho^2 + \rho^2 - \rho^3 + \rho^3 - \rho^{4)}) = \rho^4 = \left(\frac{10}{12}\right)^4 = 0{,}4822$$

1h - 100%

x - 48,22%

x = 48,22%

18) ***A saída de um túnel é uma pista com 2 faixas de trânsito, em mão única; 100 metros mais adiante há um sinal luminoso que abre o trânsito a cada 20 segundos, deixando passar de cada vez 10 carros. Em um dado momento, os carros estão saindo do túnel à razão de 24 por minuto em média. Sabendo-se que cada carro ocupa 10 metros de sua faixa de trânsito, pergunta-se:***

a. ***Qual o tamanho médio do trecho de pista ocupado pelos carros?***

b. ***O sinal enguiçou e a CET colocou, provisoriamente, um agente de trânsito que abre o trânsito em média a cada 20 segundos. Qual a probabilidade que a fila invada o túnel?***

$$\mu = 10 \text{ carros} / 20 \text{ segundos} = 30 \text{ carros} / \text{min}$$
$$\lambda = 24 \text{ carros} / \text{minuto}$$
$$\text{a)} L = ?$$
$$L = \lambda W$$
$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{24}{30 - 24} = 4 \text{ carros (20m)} \ \ 1\text{carro} = 10\text{m}$$

$$\text{b) N.º de carros na pista} = 20$$
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60}$$
$$1 - p_{20} = 1 - \left[(1-\rho)\rho^{20}\right] = 1 - \left[(0,2)\,(0,8)^{20}\right] = 0,9977$$

19) ***Uma famosa vidente, acostumada a prever (???) o futuro de políticos, tem sua agenda cheia de entrevistas marcadas à razão de uma por hora (dia de 8 horas). Ela dedica, em média, 45 minutos a cada cliente e, para suavizar a espera da clientela, manda servir café com bolinhos na sala de espera. Uma pequena questão alimentar: se cada pessoa toma uma xícara de café (100 ml) a cada meia hora, quantos litros de café deverão ser preparados em média, por dia?***

$$\lambda = 1 \text{pessoa} / \text{hora}$$
$$\mu = 1 \text{ pessoa} / 45 \text{ minutos} = 60/45 \text{ pessoas} / \text{hora}$$
$$1 \text{ pessoa} - 100\text{ml} / \text{meia hora}$$
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 45/60$$
$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{45/60}{\frac{60}{45} \cdot \frac{15}{60}} = 2,25 \text{ tempo médio de espera de uma pessoa na fila}$$
$$L_q = \lambda W_q = 2,25 \text{ pessoas}$$
$$0,2 \text{ litros} - 1\text{h}$$
$$x \text{ litros} \quad - 2,25\text{ h}$$
$$x = 0,45 \text{ litros (consumo individual)}$$
$$\text{Consumo total} = 0,45 \cdot 2,25 = 1,0125 \text{ litros}$$

20) ***Um mecânico de manutenção de máquinas de cópia eletrostática trabalha por contrato para a Prefeitura. Ele pode consertar, em média, 3 máquinas por dia e o***

contrato por ele assinado prevê que todo chamado seja atendido no mesmo dia com 90% de certeza. Qual a capacidade mensal do serviço, com este padrão de atendimento?

$$\mu = 3 \text{ máquinas / dia}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow 0{,}9 = \frac{\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = 2{,}7 \text{máquinas/dia}$$

$$\rho = 0{,}9$$

$$L_b = ?$$

$$L = L_b + L_q \Rightarrow L_b = 0{,}9 \text{ máq} \cdot 23 \text{ dias úteis} = 20{,}7 \approx 21 \text{ maq/mês}$$

$$L = \lambda W \therefore L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2{,}7}{3 - 2{,}7} = \frac{2{,}7}{0{,}3} = 9 \text{ máquinas}$$

$$L_q = \lambda W_q \therefore L_q = \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{2{,}7 \cdot 0{,}9}{3 \cdot 0{,}1} = 8{,}1 \text{máquinas}$$

21) ***Uma loja de autopeças tem estacionamento com espaço para 10 carros. Os carros chegam segundo um processo Poisson a uma média de 10 por hora. Sabe-se também que o tempo que eles permanecem estacionados tem distribuição exponencial com média de 10 min. Determine:***

c. ***O número médio de vagas ociosas no estacionamento?***

d. ***A probabilidade de um carro que chegue não encontre lugar para estacionar?***

Sugestão: Para valores de k grandes use $\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} = e^x$ **.**

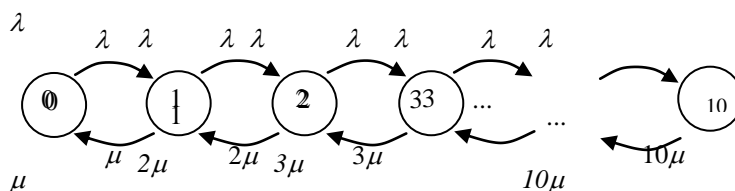
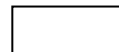
$$\lambda = 10 \text{ carros / hora}$$

$$\mu = 10\text{carro / 10 minutos} = 6 \text{ carros / hora}$$

(0) $\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

(1) $\lambda p_1 = 2\mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} p_0$

(2) $\lambda p_2 = 3\mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0$

.
.
.

(n) $\lambda p_{n-1} = n\mu p_n \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 \Rightarrow p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad n=0,1,2,...,10$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$p_0 e^{\rho} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{e^{\rho}}$$

Assim

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\rho^n}{n!e^{\rho}}$$

a) vagas ociosas= total de vagas disponíveis – vagas utilizadas (L_b) =10 -1,66 = 8,33

$$L_b = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = \frac{10}{6} = 1,66$$

b)
$$p_{10} = \frac{(1,66)^{10}}{10!e^{1,66}} = 8,325 \cdot 10^{-6}$$

22) ***Considere um sistema com um único atendente tendo uma distribuição de chegadas Poisson com λ = 10 c/h. Atualmente o atendente trabalha de acordo com uma distribuição exponencial com um tempo médio de serviço de 5 min. A gerência tem a sua disposição um curso de treinamento que terá como resultado uma melhora (decréscimo) na variância do tempo de serviço, porém com um leve aumento da média. Após a execução do curso estima-se que o tempo médio de serviço aumentará para 5,5 min, porém o desvio padrão decrescerá de 5 para 4 min. Deve a gerência mandar o atendente fazer este curso?***

M/M/1

λ=10 c/h

$\mu_{s/c}$=1c/5 minutos = 12 c / hora

$\mu_{c/c}$=1c/5,5minutos

Objetivo:redução do tempo de espera no sistema (W)

$$W_{s/c}=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{12-10}=0{,}5\text{hora}=30\text{minutos}$$

$$W_{c/c}=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{10{,}9-10}=1{,}1\text{hora}$$

Logo a gerência não deve mandar o atendente fazer o curso.

23) ***K-sucata recebe uma média de 15 pedidos por dia de um certo modelo antigo de carro, do qual ela pode atender a 20 pedidos por dia. Entretanto se menos que 3 carros forem alugados, a companhia perde dinheiro da seguinte forma: se somente 2 carros são alugados a perda é de $220/dia, se somente 1 carro for alugado a perda é de $260/dia e se nenhum carro for alugado a perda é de $290/dia. As perdas são, naturalmente, compensadas pelos ganhos quando 3 ou mais carros são alugados. Considerando apenas as perdas, qual será o valor esperado do prejuízo por dia? Assuma chegadas e serviço Poisson e que não existe limitação de tamanho nem desistências da fila.***

M/M/1

λ=15 pedidos / dia

μ=20 pedidos / dia

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{15}{20}=0{,}75$$

n.ºalugados		perda
2	$\rightarrow$	$220/dia
1	$\rightarrow$	$260/ dia
0	$\rightarrow$	$290/dia

$$E(\text{prejuízo})=290p_0+260p_1+220p_2=$$

$$=290(1-\rho)+260(1-\rho)\rho+220(1-\rho)\rho^2=$$

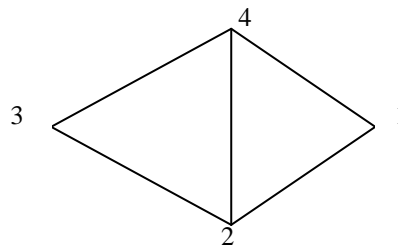
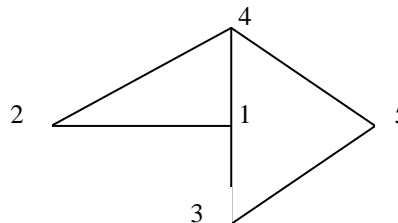
$$=(290.0{,}25)+(260.0{,}25.0{,}75)+(220.0{,}25.0{,}5625)=\$152{,}2/\text{dia}$$

7. Lista de Exercícios Complementares

7.1. *Processos Estocásticos*

1) Considere um processo ergódico $\{X_1, X_2, X_3, ...\}$, no qual $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$ e $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$. Dê pelo menos três interpretações distintas para os valores π_j.

2) Explique o que é um processo estocástico
   a. Estacionário, e
   b. Markoviano.

3) Quatro cidades são ligadas por uma sistema viário esquematizado na figura abaixo. Existe no sistema um conjunto de N carros. Cada manhã um carro que chega na cidade na noite anterior é carregado e despachado, sua rota é escolhida com igual probabilidade entre todas as rotas que deixem a cidade, independentemente do que acontece com os demais carros. Encontre a proporção aproximada de carros que estarão em cada cidade em cada noite. Qual o tempo médio que um carro demorará a retornar a cada cidade visitada ?

4) Idem com 5 cidades.

5) Um modelo unidimensional de uma part se movendo em uma caixa com paredes elásticas consiste dos seguintes estados: (-N, -N+1, ..., -1,0,1,2,....., N). Se a partícula não está em um dos nós extremos então ela se move para a esquerda ou direita com probabilidade ½. Se ela está em um dos estados extremos então ela se move com probabilidade 1 para o estado anterior. Encontre as probabilidades estacionárias de distribuição.

6) Uma máquina pode estar em dois estados: funcionando ou quebrada. Quando funciona dá um lucro de 480 por período e, quando está quebrada, as despesas são de 160 por período. Considerando a situação de regime permanente:

	Funcionando	Quebrada
Funcionando	0,8	0,2
Quebrada	0,6	0,4

   a. Calcule o ganho médio por período.
   b. Verifique se um plano de manutenção preventiva que custa 50 por período, alterando pff para 0,9 e pqq para 0,3 vale a pena.

7) De forma simplificada, classificamos as famílias de certa região em relação ao seu padrão de vida, como "alto", "médio" ou "baixo". Hoje, 2% das famílias têm padrão alto e 14% têm padrão baixo. Suponha que as probabilidades das famílias mudarem de padrão, num período de cinco anos, são as seguintes:

alto para médio: 15% alto para baixo: 5% médio para alto: 3%

médio para baixo: 5% baixo para médio: 4% baixo para alto: 1%

   a. Estime a proporção de famílias que terá padrão alto daqui a dez anos. [5,9%]
   b. Que proporção das famílias terá padrão de vida alto, médio e baixo, a longo prazo? [alto 8,7%; médio 41,3%; baixo 50,0%]
   c. Daqui a quanto tempo, em média, uma família de padrão baixo alcançará um padrão alto? [300 anos]

8) Em certo país, no qual se realizam eleições de quatro em quatro anos, há três partidos: da Esquerda (1), do Centro (2) e da Direita (3). Suponha que há apenas um partido vencedor em cada eleição, que a probabilidade do partido j ganhar uma eleição após uma vitória do partido i na eleição anterior está na linha i e na coluna j da tabela a seguir e que esta probabilidade mantém-se constante ao longo do tempo.

	1	2	3
1	0,6	0,2	0,2
2	0,4	0,5	0,1
3	0,1	0,2	0,7

   a. Qual é a fração do tempo durante a qual cada partido governa, em média? [PE 37,1%; PC 28,6%; PD 34,3%]
   b. Quanto tempo decorre, em média, desde uma vitória do Partido da Esquerda até que o Partido da Direita ganhe duas eleições (não necessariamente consecutivas)? [35 anos]

9) Suponha que em uma linha de montagem final para carros haja o seguinte conjunto de regras
   (1) Dois conversíveis não podem jamais se seguir na linha porque a quantidade de trabalho desequilibraria a linha.
   (2) Uma perua deve ser seguida de um sedam para equilibrar a linha.
   (3) Um sedam tanto pode ser seguido por uma perua como por um conversível, mas não por um outro sedam. Somente estes três modelos são produzidos na linha.

   Monte uma matriz de transição possível para estas regras inserindo as letras a, b, c, d, ..., etc, para os valores não definidos numericamente pelas regras acima.
   a. A cadeia é irredutível ?
   b. Qual a probabilidade de que após um conversível o próximo ocorra na linha, com um espaço de diferença (separado por outro veículo) ? Use as letras a, b, c, d, ... se necessárias.
   c. Se P é uma matriz de transição de um passo, que interpretação daria no (ij)-ésimo elemento de Pn para n grande ?
   d. Suponha que se firmou um contrato para entregar 10.000 carros ao final de um mês. Destes 10.000 aproximadamente 50% tinham que ser sedam, 10% tinham de ser peruas e 40% conversíveis. Determine alguma regra de programação de probabilidades que assegure esta produção e que ainda corresponda as implicações 1, 2 e 3 deste problema.

10) Um industrial tem uma máquina que, quando operacional no início do dia, tem uma probabilidade de 0,1 de quebrar alguma hora durante o dia. Quando isto acontece, o reparo é feito no dia seguinte e está completo no fim do dia.
   a. Formule a evolução do estado da máquina como uma cadeia de Markov, identificando os estados possíveis no fim do dia e construindo a matriz de probabilidades de transição.
   b. Calcule o tempo esperado que a máquina irá funcionar até que aconteça uma quebra, dado que ela acabou de sofrer um reparo.
   c. Suponha agora que a máquina já esteja operando a 20 dias, sem quebra, desde que o último reparo foi feito. Qual o tempo esperado que a máquina irá operar até que aconteça uma quebra ? Compare com o resultado da letra (b). Explique.

Suponha agora que o industrial mantenha uma máquina de reserva, a qual é usada somente quando a máquina principal está sendo reparada. Durante o dia de reparo a máquina reserva tem uma probabilidade de 0,1 de quebrar, neste caso ela será reparada no dia seguinte. Denote o estado do sistema por (x,y) onde x e y assumem os valores 0 e 1 dependendo se a máquina principal x, ou secundária y, estão operacional no fim do dia.

d. Construa a matriz de probabilidades de transição
e. Encontre o tempo de recorrência esperado para o estado (1,0).

11)Um equipamento é utilizado rotineiramente para realizar uma determinada operação, que dura uma semana. Ao final de cada operação, o equipamento é inspecionado e em 10% dos casos o desgaste verificado é de tal ordem que o equipamento precisa ser retirado definitivamente da produção. Nos demais casos, o equipamento entra em manutenção e fica totalmente recuperado em uma semana, ao custo de 5 mil reais, voltando em seguida a ser utilizado na operação, nas mesmas condições anteriores. Quando um equipamento é retirado definitivamente de produção é imediatamente substituído por um novo. Como só há espaço para o funcionamento ou manutenção de um equipamento de cada vez, a produção é interrompida quando o equipamento está em manutenção. Cada equipamento custa 100 mil reais. Considere o tempo da inspeção incluído no tempo de operação.

a. Defina um processo estocástico que represente o problema, esboce o diagrama de transições, escreva a matriz das probabilidades de transição e classifique o processo e os seus estados.
b. Quantas operações, em média, serão realizadas por um equipamento, até ele ser retirado definitivamente da produção?
c. Quantas semanas dura um equipamento, em média (incluindo os períodos dedicados à manutenção)?
d. Quantos equipamentos serão consumidos (retirados da produção) por ano (52 semanas), em média?
e. Quantas operações e quantas manutenções, em média, serão realizadas por ano?

A gerência estuda uma forma de aumentar a quantidade anual de operações realizadas de forma lucrativa. A alternativa considerada consiste em realizar duas operações antes de submeter o equipamento à manutenção (em vez de fazer a manutenção após uma operação apenas). Como antes, em 10% dos casos o equipamento ficará irrecuperável ao final da primeira operação. A gerência avalia que a probabilidade de perder o equipamento ao final da segunda operação aumentará em relação à primeira e será igual a 20%, devido aos defeitos não consertados e ao desgaste acumulado na primeira operação.

f. Calcule, para esta alternativa, os valores correspondentes aos itens (b), (c), (d) e (e) acima.
g. Suponha que cada operação contribui com um acréscimo de 20 mil reais para o lucro da companhia, já descontados os seus custos diretos (exceto a compra do equipamento e o custo da manutenção, já informados acima). Na sua opinião, a alternativa em estudo deve ser adotada? Por que?

12) O trânsito em determinada via urbana é observado e classificado, conforme a intensidade, em leve, moderado ou pesado. Após muitas observações, verifica-se que o trânsito (1) nunca passa diretamente de leve para pesado ou vice-versa; (2) quando está leve permanece leve no minuto seguinte 50% das vezes; (3) se está pesado assim permanece no minuto seguinte com 40% de probabilidade; (4) se está moderado então a probabilidade de permanecer moderado no minuto seguinte depende da intensidade no minuto anterior: 20% se estava leve, 50% se estava moderado e 30% se estava pesado, e (5) quando está moderado passa a pesado no minuto seguinte com probabilidades iguais a 60% se estava pesado no minuto anterior, 20% se estava moderado e 60% se estava leve.

a. Defina um processo estocástico que represente o problema, esboce o diagrama de transições, escreva a matriz das probabilidades de transição e classifique o processo e os seus estados.
b. A longo prazo, em que proporções do tempo o trânsito ficará leve, moderado e pesado?
c. Em quantos minutos, em média, o trânsito leve se torna pesado?

13)Considere um problema de PL com cinco soluções básicas viáveis e uma única solução ótima. Assuma que o método simplex comece da pior solução básica viável e em cada pivoteamento exista igual probabilidade de mover para qualquer solução básica viável melhor. Em média quantos pivoteamentos serão necessários para encontrar a solução ótima do PL ?

14) Um jogador joga um "jogo limpo" no qual as chances são 2 contra 1. Em outras palavras ele tem 1/3 de probabilidade de ganhar e 2/3 de perder. Se ganhar, ganhará $2. Se perder, perderá $1. Suponha que os recursos totais do jogador e do seu oponente sejam $N. Se o capital de qualquer um dos jogadores cair abaixo do ponto em que eles pudessem pagar caso perdessem o jogo seguinte o jogo termina.
   a. Desenhe o diagrama de transição de estados e determine a matriz de transição.
   b. Suponha que os dois jogadores concordem em que se o capital de qualquer dos dois cair para $1, eles farão o próximo jogo com chances iguais – ganharão ou perderão $1, com igual probabilidade. Desenhe o diagrama de transição de estados e determine a matriz de transição para este caso.
   c. No caso descrito na letra (b) suponha que o jogador 1 tem $3 e o jogador 2 tem $2, qual a probabilidade do jogador 1 ganhar o jogo ?
   d. Quantas jogadas durará o jogo ?

15)Considere o jogo de dados que segue. O jogador lança um dado de seis faces. Se o resultado for 5 ou 6 no primeiro lançamento, ele ganha imediatamente. Se o resultado for 1, perde imediatamente. Em qualquer outro caso, o jogador continua a lançar o dado até obter 5 ou 6, quando perde, ou até obter o mesmo resultado do primeiro lançamento, quando ganha. O dado não é equilibrado e as probabilidades dos resultados 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são, respectivamente,10%, 15%, 20%, 20% E 20%.
   a. Defina um processo estocástico que represente o problema, esboce o diagrama de transições, escreva a matriz das probabilidades de transição e classifique o processo e os seus estados.
   b. Calcule a probabilidade do jogador, ao final, ganhar o jogo.
   c. Quantas vezes, em média, o dado será lançado até o jogo terminar?

16) Um curso compõe-se de três fases. Em cada uma delas, o aluno pode ser reprovado definitivamente no curso, com probabilidade igual a 6%, obrigado a repetir a fase, com probabilidade igual a 30%, ou passar para a fase seguinte. Na terceira fase, "passar para a fase seguinte" representa a aprovação final no curso. Cada fase dura um mês.Qual a probabilidade de um aluno que passou para a segunda fase concluir o curso com aprovação? [83,6%]
   a. Quanto tempo, em média, um aluno fica no curso? [3,9 meses]
   b. Qual é a proporção de alunos matriculados no início do curso que são reprovados? [23,6%]

17) Um centro de tratamento médico, de forma extremamente simplificada, pode ser modelado por uma cadeia de Markov de quatro estados, conforme demonstra a tabela abaixo.

	T. medicamentos	T. cirúrgico	Curado	Morto
T. medicamentos	0,3	0,3	0,3	0,1
T. cirúrgico	0,1	0,1	0,6	0,2
Curado	0	0	1	0
Morto	0	0	0	1

   a. Para um paciente inicialmente em tratamento medicamentoso, calcule as probabilidades dele ficar curado, e de vir a falecer.
   b. Repita para o caso do paciente que inicialmente recebeu o tratamento cirúrgico.
   c. Um paciente possui as seguintes utilidades subjetivas, em função de seu sofrimento: u(continuar doente) = -1; u(estar curado) = 10, u(estar morto) = -30. Qual a melhor alternativa para iniciar o tratamento ?

18)A fase final da fabricação de certa peça de vidro compõe-se de duas ou três operações, conforme a qualidade da peça resultante seja B ou A, respectivamente. Das peças submetidas à operação 1, 10% sofrem defeitos irrecuperáveis e são perdidas, 20% precisam ser reprocessadas e as restantes passam para a operação 2. Das peças submetidas à operação 2, 4% precisam retornar ao início do processo, isto é, passar de novo pelas operações 1 e 2, 60% estão em condições de serem submetidas à operação 3 e as restantes são consideradas prontas, com qualidade B, sendo vendidas ao preço unitário de $9. Das peças submetidas à operação 3, 9% são perdidas definitivamente e as restantes, com qualidade A, vendem-se a $16 cada uma. Cada operação leva um dia para ser executada. Os custos unitários médios das operações 1, 2 e 3 são respectivamente iguais a $2, $1 e $3. Todos os dias entram 70 peças na fase final de fabricação. O custo de fabricação unitário médio acumulado até a fase final, exclusive, é igual a $3.
   a. Quantas peças por dia, em média, alcançam as qualidades A e B e quantas são perdidas? [A 34,7; B 22,8; perdidas 12,5]

b. Qual é o lucro bruto médio diário resultante da fabricação e venda das peças? [$191,30]
c. Quanto tempo, em média, demora para produzir-se uma peça com qualidade A? [3,3 dias]

7.2. *Lista de Exercícios de Teoria de Filas*

1) Marque V ou F se considerar a afirmativa respectivamente verdadeira ou falsa.

   a. ( ) A primeira premissa para a existência de um sistema de filas é que a capacidade de serviço deve ser em média maior do que a demanda pelo serviço, muito embora ela possa ser instantaneamente menor.

   b. ( ) Em um sistema com restrições de tamanho da fila a condição de estabilidade do sistema de filas é que o fator de utilização seja menor que 1.

   c. ( ) Um processo exponencial de chegadas pode ser caracterizado por um número elevado de tempos entre chegadas pequenos e raros os tempos entre chegadas grandes.

   d. ( ) O modelo de filas que representa um supermercado com 5 caixas, onde o processo de chegadas é Poisson e serviço exponencial é denominado M/M/5.

   e. ( ) A afirmativa "o tempo ocioso do sistema é igual a um menos o fator de utilização" é válida para qualquer sistema de filas.

   f. ( ) Em um processo Nascimento e Morte para qualquer estado do sistema n (n = 0,1,2,...), a taxa média (número de ocorrências esperadas por unidade de tempo) à qual os incidentes de entrada ocorrem tem que ser igual a taxa média à qual os incidentes de saída ocorrem.

   g. ( ) A primeira premissa para a existência de um sistema de filas é que a capacidade de serviço deve ser em média menor do que a demanda pelo serviço, muito embora ela possa ser instantaneamente maior.

   h. ( ) Um processo exponencial de chegadas pode ser caracterizado por um número elevado de tempos entre chegadas pequenos e raros os tempos entre chegadas grandes.

   i. ( ) O modelo de filas que representa um supermercado com 5 caixas, onde o processo de chegadas é Poisson e serviço exponencial é denominado M/M/1 .

   j. ( ) Em um sistema com restrições de tamanho da fila a condição de estabilidade do sistema de filas é que o fator de utilização seja menor que 1.

   k. ( ) A afirmativa "o tempo ocioso do sistema é igual a um menos o fator de utilização" é válida para qualquer sistema de filas de servidor único.

   l. ( ) A taxa de saída de um sistema de filas em equilíbrio é igual a taxa de entrada somente se o servidor for exponencial.

   m. ( ) Um servidor Erlang é equivalente a um conjunto de servidores exponenciais em série.

2) Mostre que, com respeito ao tamanho médio no sistema são verdadeiras as seguintes afirmações:

   a. A fila M/M/1 é sempre melhor que a fila M/M/2 se ambas tem o mesmo ρ.

   b. O sistema M/M/2 é sempre melhor que o sistema com duas filas M/M/1 independentes, cada uma recebendo metade das chegadas, desde que os dois sistemas tenham a mesma taxa de serviço por servidor.

3) Discuta sistemas de filas onde o serviço seja ficar estacionado. Analise os casos onde a população e a fila sejam infinitas e finitas e onde o servidor possa ser considerado infinito.

4) Deduza (explique) intuitivamente a expressão de Little ($L = \lambda W$)

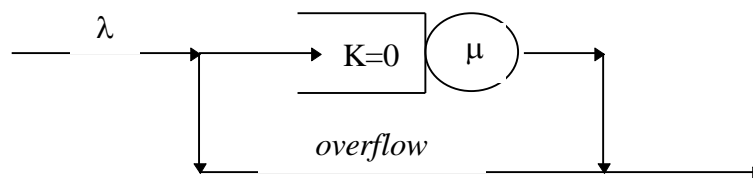
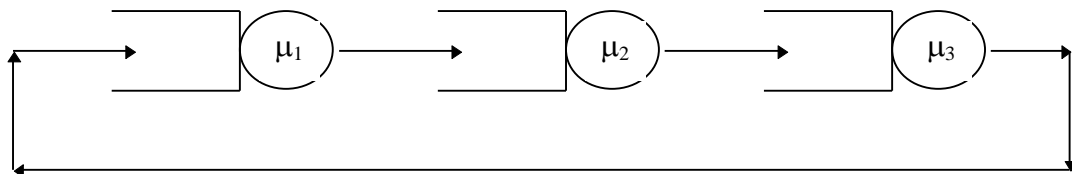
5) Esboce num gráfico abaixo a família de curvas $P_0 = F(S,\rho)$ para um sistema de filas M/M/S. Justifique sua resposta.

6) Explique as dificuldades para se resolver um sistema de rede de filas, explicitando as hipóteses adotadas para superá-las.

7) Considere um sistema de fila com um único atendente com a distribuição de chegadas Poisson com taxa média de chegada λ conhecida. Suponha que a distribuição do tempo de serviço é desconhecida porém com taxa média de serviço μ conhecida.
   a. Compare o tempo médio de espera na fila se a distribuição dos tempos de serviço fosse: *i) exponencial, ii) constante, iii) Erlang* com quantidade de variação (isto é, o desvio padrão) metade entre os casos constante e exponencial.

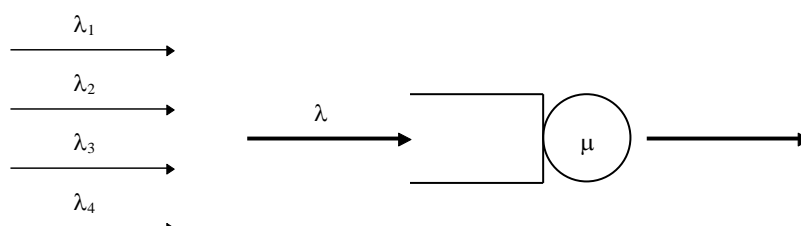
   b. Qual é o efeito no tempo médio de espera na fila e no comprimento médio da fila se ambos λ e μ são dobrados e a escala da distribuição do tempo de serviço é modificada correspondentemente.

8) De há alguns anos para cá, as agências bancárias adotaram o sistema de fila única para o atendimento dos caixas, em substituição ao antigo sistema, onde cada caixa tinha sua fila. Quais foram as conseqüências desta mudança para os clientes ? Para simplificar, considere que as chegadas de clientes podem ser descritas por um processo de Poisson com taxa constante e que os caixas atendem num tempo com distribuição exponencial, todos com a mesma média. Ilustre sua explicação com exemplos numéricos.

9) Seja a fila M/M/1/0 - fila com *overflow*, mostrada na figura abaixo. Seja *N(t)* o número de fregueses no instante *t*. Modele a fila como um processo estocástico: construa o diagrama de transição de estados, escreva o gerador infinitesimal, obtenha a distribuição estacionária. Obtenha o empo médio entre *overflows*.

10) Desenhe o diagrama de transição de estados para a rede fechada de filas abaixo com 2 clientes.

11) Quais as condições para que um sistema de filas permaneça estável? Analise as situações em que o sistema é infinito e finito.

12) Seja um sistema de filas de servidor único com processo Poisson de chegadas com taxa média λ, e com taxa média de serviço μ. Analise o que acontece com o tempo médio de um cliente na fila e no sistema, bem como o número médio de clientes na fila e no sistema, quando você varia a distribuição do tempo de serviço.

    Sugestão: A partir do modelo M/G/1 analise os modelos M/D/1 e M/M/1.

13) Clientes chegam a uma única fila segundo diferentes processos Poisson com taxas λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Qual a taxa combinada de chegada? Qual a distribuição de probabilidades do tempo entre chegadas?

14) Clientes chegam a um posto de gasolina, com 5 bombas, de 5 em 5 minutos, mas se o número de clientes no posto for superior a 10 20% deles desiste. O tempo de atendimento em cada bomba é de 12' se houver apenas um cliente na bomba, 9' se houverem 2 clientes e 6' se houverem mais de 2 clientes. Determine:

a. a taxa média de chegada,

b. o tempo médio de atendimento em cada bomba e

c. o fator de utilização.

15) Considere um modelo de filas com uma estação de serviço a qual as unidades chegam em média a uma razão de 30 por hora. O mecanismo de atendimento serve a cada unidade em exatamente 1,5 minutos. Suponha que o mecanismo tenha sido substituído por outro com uma distribuição exponencial de tempo de serviço. Qual deve ser o tempo médio de serviço; neste caso:

a. para garantir o mesmo tempo médio de permanência do usuário no sistema ?

b. para garantir o mesmo número médio de unidades no sistema ?

16) Um escritório de advocacia tem 3 sócios, que recebem os clientes na ordem em que estes chegam. A demanda média pelo escritório é de 20 pessoas por dia (de 8 horas) e cada cliente ocupa, em média, 40 minutos do advogado que o atendeu.

a. Quantas horas por semana pode um advogado utilizar no atendimento de clientes ?

b. Quanto tempo, em média, gasta um cliente ao se dirigir ao escritório ?

17) Um serviço de lavagem instantânea de carros utiliza uma máquina de escovas rotativas que lava um carro a cada 5 minutos, em média. Num determinado dia, a demanda pelo serviço é de 10 carros por hora. Além da lavagem há uma única bomba de gasolina no posto. A área de espera para lavagem é suficiente para 33 carros; se há 4 carros ou mais à espera, o congestionamento que resulta faz cair em 20% a taxa de atendimento da bomba, que é originalmente de 20 carros/hora. A cada hora 15 carros, em média procuram o posto para abastecimento.

a. Qual a probabilidade de que o serviço de lavagem prejudique o de abastecimento ?

b. Qual o número médio de carros à espera do abastecimento, com e sem congestionamento na lavagem ?

c. Você vai abastecer seu carro e lavá-lo depois. Quanto tempo espera gastar com isto ?

18) Na construção de um palácio romano, sob Tibério César, um grande número de escravos trabalhava nas escavações necessárias à construção dos alicerces. A terra era levada em cestos, de mão em mão, do local da escavação até uma estrada que passava ao lado, onde os cestos eram descarregados em carroças. No momento que nos interessa, o trabalho de escavação estava concentrado na parte mais próxima da estrada, sendo necessários apenas 5 escravos para fazer o trabalho de passagem de cestos. O enchiimento destes se fazia à razão de 126 por hora,, em média; cada escravo da fila levava, em média, 4 segundos para receber um cesto e passá-lo adiante ou despejá-lo na carroça. Enquanto um escravo passava um cesto, os outos descansavam (i. é, não havia dois cestos sendo passados simultaneamente). Cada carroça podia carregar o conteúdo de 30 cestos; as carroças chegavam ao local da obra à razão de 4 por hora, em média.

a. Qual o número médio de cestos a espera de serem carregados ?

b. Qual o número médio de carroças vazias a espera de serem enchidas ?

c. Suponha que a escavação, ao progredir, se afaste da estrada; quantos escravos podem ser colocados a mais na fila de carregamento, sem fazer com que os cestos tenham de esperar indefinidamente ?

d. Neste último caso, quais seriam as respostas aos itens (a) e (b) ?

19) Em um hospital a triagem dos pacientes é feita por 4 médicos, que atendem com hora marcada e sem escolha (o paciente é atendido pelo primeiro médico disponível). Os pacientes chegam à razão de 60 por dia (de 8 horas). Cada médico atende, em média, a 2 pacientes por hora. A probabilidade de indicação de cirurgia para um paciente é de 0,15; há 3 salas de operação no hospital e cada equipe médica (que usa uma sala) pode operar até 4 pacientes por dia em média. Determinar:

a. o tempo total dispendido por um paciente na triagem;

b. a probabilidade de que nenhuma sala de operação esteja funcionando;

c. o número médio de pacientes a espera de cirurgia.

20) Num restaurante pode se escolher entre dois tipos de serviço: buffet, ou pedido nas mesas. Em um certo dia, entre 11:30 e 13:00, o regime pode ser considerado estacionário e se dispõe de cozido no serviço de buffet, e de omelete no serviço de pedido nas mesas. O cozido é distribuído em três bandejas, com uma única atendente, (tempo médio de 8 segundos por bandeja); o usuário deve se dirigir a ela. Para a omelete, o usuário se dirige à mesa e faz o pedido (o tempo médio de preparo de uma omelete é de 3 minutos). A cozinha pode processar ao mesmo tempo até 3 omeletes. Outros dados: venda de tickets, média de 3 pessoas por minuto; chegada de clientes, média de 170 pessoas por hora; probabilidade de um usuário preferir omelete: 0,3. Determinar:

a. número médio de pessoas à espera para entrar no restaurante;

b. número médio de pessoas à espera de omeletes;

c. número médio de pessoas à espera do atendimento no serviço de buffet;

d. o tempo médio gasto em esperas e atendimentos por uma pessoa que almoça omelete;

e. o tempo médio gasto em esperas e atendimentos por uma pessoa que almoça cozido; a probabilidade de não haver, num dado momento, ninguém esperando omelete.

21) Você e seus colegas de turma receberam para resolver um problema de filas que exige a consulta a dois gráficos de um livro que só existe na biblioteca. Há dois exemplares iguais do livro e a consulta a cada gráfico exige, em média, 7,5 minutos de cada aluno. Um livro somente é usado por um aluno quando não está em uso por outro. O trabalho é individual e a cada hora chegam, em média, 6 alunos da turma. Quanto tempo um deles poderá esperar gastar na biblioteca ?

22) Uma tecelagem tem 250 teares e as estatísticas mostram que, em média, 1% deles apresentam algum defeito ao longo de um dia de trabalho. Há três mecânicos de manutenção, cada um podendo consertar, em média, dois teares por dia, por um salário de \$ 10/ h. O dia de trabalho tem 8 horas. Cada hora parada de um tear representa uma perda de \$ 50. A manutenção pede mais dois mecânicos. Você é o gerente da fábrica, vai atendê-la, vai contratar apenas mais um mecânico, ou vai deixar as coisas como estão ?

23) Uma sauna para executivos oferece a clientela um serviço de lavagem a seco para ternos e de lavagem de roupa branca, para que um cliente deixe sua roupa ao chegar e a receba pronta ao sair. É importante que os clientes não tenham que esperar, por serem pessoas ocupadas e por isto a gerência deseja que o tempo médio gasto com um serviço de lavagem não ultrapasse o tempo médio de permanência na sauna, que é de 20 minutos. A capacidade da sauna é de 10 clientes. Há três máquinas de limpeza a seco e 2 lavadeiras especializadas em roupa branca. Em ambos os serviços, a roupa de cada cliente é processada em separado. Uma máquina processa um terno em 10 minutos e uma lavadeira gasta, em média, 10 minutos para lavar e outros 10 para passar a ferro a roupa de um cliente. Dos clientes 30% usam a lavagem a seco e 20% lavam roupa branca, não sendo habitual que um deles use os dois serviços no mesmo dia.

a. A gerência gostaria que os clientes não tivessem de esperar para entrar na sauna. Quantos clientes poderão chegar em média, por hora, se a probabilidade de espera deve ser menor que 5% ?

b. Suponha que chegam 25 clientes por hora. Será então possível dizer que os serviços de lavagem a seco e de roupa branca funcionam a contento ? Qual a situação da sauna, neste caso, em termos de fila de espera ?

24) Uma dona de casa tem, no congelador de sua casa de praia, 5 quilos de camarão para o almoço de domingo. Na sexta feira, o gás engarrafado acabou e à noite caiu uma forte chuva que, além de bloquear o acesso de veículos à área próxima, provocou falta de luz. A companhia de eletricidade está, neste período, recebendo em média 3 pedidos por hora para reparos na rede elétrica. Ela dispõe de 5 equipes de reparo, uma equipe levando em média 90 minutos para chegar ao local do defeito e efetuar o reparo. O congelador leva 6 horas para descongelar. Após este tempo, o camarão terá de ser preparado, a fim de que não se estrague. Sem acesso para o caminhão de gás e não havendo fogão à lenha disponível, pergunta-se se a dona da casa em questão poderá esperar ou não conseguir usar o camarão para o seu almoço.

25) As pessoas que atenderam a um anúncio de emprego colocado por uma empresa passam por uma entrevistadora com a qual é necessário marcar hora; nessa base, 6 pessoas por hora são agendadas e cada entrevista leva, em média, 8 minutos. As pessoas passam então ao serviço médico da empresa, onde um médico as submete a três exames, cada um com duração média de 5 minutos. Há dois médicos fazendo este atendimento.

a. Quanto tempo, em média, uma pessoa demorará para iniciar uma entrevista ?

b. Quantas pessoas, em média, estarão no departamento médico em um dado momento ?

26) Em uma agência bancária há dois guichês para atender apenas a retiradas. Os clientes que as desejam chegam à razão e 25 por hora em média e se dirigem ao guichê 1, cujo caixa, conhecido por sua rapidez, leva em média 1,5 minutos para atender a um cliente. Se um cliente encontrar este guichê ocupado e o guichê 2 desocupado, então ele se dirigirá para este último, cujo caixa consegue atender apenas a 20 clientes por hora em média. Qual a fração do tempo ocioso de cada um dos caixas ?

27) Uma linha automática de embalagem de medicamentos enche e fecha 60 frascos de determinado remédio por minuto. Os frascos passam então por uma mesa na qual são colocados em caixas, manualmente, por 3 embaladoras capazes de embalar, cada uma, em média 22 frascos por minuto. Em média quantos frascos estarão sobre a mesa a espera de serem embalados ?

28) No trailer "O Lanche" situado defronte ao bloco M do CCS trabalham duas moças. Maria no caixa e Beatriz no atendimento aos pedidos. Quando existe apenas um cliente esperando por um pedido ele é atendido por Beatriz, com um tempo de serviço esperado de 1,5 minuto. Quando existe mais de um cliente aguardando por pedido, Maria "dá uma mão" para Beatriz e o tempo para processar um pedido cai para 1 minuto. Em ambos os casos a distribuição do tempo de serviço é exponencial.

a. Desenhe o diagrama de transição de estados para este sistema de filas.

b. Qual é a distribuição de probabilidade do estado de equilíbrio do número de clientes no sistema?

c. Como você obteria L, L_q , W, W_q ?

29) Um pequeno hotel possui 2 cofres para guarda de valores dos hóspedes, em regime de exclusividade (ou seja, não se quadram valores de dois hóspedes em um mesmo cofre). Em média 3 pessoas por semana procuram o gerente para solicitar o uso de um cofre.

Um levantamento feito por uma companhia de seguro mostrou que os dois cofres ficam vazios durante 10% do tempo. De posse deste dado você, que , o gerente, teria condições de dizer por quanto tempo em média, os valores de um hóspede ficam guardados?
Qual seria o número de cofres necessário para mantendo o mesmo tempo de ocupação dos cofres atender ao dobro da demanda por cofres, garantindo que o tempo desocupado de cada cofre não ultrapasse 20% do tempo?

30) Em uma agência de banco, 3 funcionários ocupam 3 caixas destinados apenas a retiradas; cada um pode atender, em média a 60 pessoas por hora. Os clientes que demandam essas caixas chegam a

média de 150 por hora e entram, com igual probabilidade, em qualquer das filas que se formam diante delas. (O sistema se encontra em equilíbrio estacionário).

O gerente da agência resolveu adotar, para essas caixas, o sistema de fila única.

a. Qual a probabilidade de uma dada caixa estar ociosa, no sistema antigo ?
b. Idem no novo sistema ?
c. Qual a economia (ou perda) de tempo obtida por um cliente que vai fazer retirada, com a mudança de sistema ?

31) Em um supermercado da cidade existem 30 caixas distribuídas da seguinte forma: 2 caixas se destinam a emissão de nota fiscal, 3 caixas são caixas rápidas e as demais caixas são caixas normais. Os tempos médios de atendimento em cada um destes tipos de caixa são de respectivamente 15 min, 5 min e 10 min. Além destas caixas existem ainda 5 postos de recebimento com cartões de crédito, cujo tempo médio de atendimento é de 2 min. Sabe-se que dos 60 clientes que se destinam aos caixas por hora 10% se destinam aos caixas que emitem notas, 30% se destinam aos caixas rápidos e os 60% restantes se destinam aos caixas normais. Sabe-se ainda que 60% dos clientes deste supermercado efetuam seus pagamentos com cartão de crédito.

Observação: Os cliente que pagam com cheque ou dinheiro dirigem-se a um dos caixas e após serem atendidos se retiram do estabelecimento. Os clientes que pagam com cartão de crédito dirigem-se a um dos caixas e após o registro de suas compras dirigem-se a um dos postos de recebimento com cartão para assinarem o recibo de débito, após o que retiram-se.

a. Represente esquematicamente o modelo de filas correspondente ao problema.
b. Qual o valor esperado do tempo que um cliente demora para pagar suas compras (desde o instante que ele se destina ao caixa até o instante que ele sai do supermercado) ?
c. O que aconteceria ao tempo obtido no item (b) se o número de clientes que chegam ao supermercado por hora dobrasse? Por que ?
d. Na saída dos caixas para os postos de recebimento de cartão é necessário supor que 2 clientes não saem simultaneamente, por que?

32) O transporte de passageiros de Manaus para a base de produção de Urucu da Petrobrás é realizado por dois helicópteros com capacidade para 16 passageiros cada. A duração da viagem tem distribuição exponencial com média 2 horas. O procedimento de embarque é o seguinte: Os passageiros que chegam, a uma taxa de 12 por hora, são inscritos nos vôos na ordem em que chegam. Quando a lotação de um vôo está completa então os passageiros são admitidos numa sala de vistoria e espera, onde aguardam a preparação da aeronave para o embarque.

a. Construa o diagrama de transição de estados para este sistema.
b. Usando o modelo adequado calcule o número esperado de pessoas na sala de espera e o tempo médio entre o instante que o passageiro entra na sala de espera e o instante que o helicóptero pousa na base de Urucu.

33) Um projetista de plataforma de produção de petróleo se deparou com a seguinte situação: A produção de petróleo é estimada em 15.000 m3/dia. Cada bomba de transferência tem capacidade para transferir 5.000 m3/dia, e em média trabalha 20 dias sem dar problemas (exponencialmente distribuído). O custo de aquisição de cada uma destas bombas , de US$150.000,00. O projetista precisa decidir quantas bombas comprar. Os dados adicionais de que ele dispõe são: o tempo médio para reparar uma destas bombas quando elas dão problema é de 2 dias (exponencialmente distribuídos); usualmente existe uma equipe de manutenção embarcada que pode reparar uma bomba de cada vez; se em um determinado instante não houver capacidade de transferência suficiente para escoar toda a produção esta é restringida e ocorre uma perda por lucros cessantes cujo valor unitário é estimado em US$1,20/m3 ; a vida útil do projeto é de 10 anos. A luz de seus conhecimentos de teoria das filas quantas bombas deverá o projetista especificar ?

34) Para produzir um determinado tipo de tinta colorida uma indústria realiza em uma máquina 8 operações de mistura. As operações são semelhantes, consecutivas, e a duração de cada uma delas pode ser considerada exponencialmente distribuída com média 1 minuto.

A matéria prima da máquina em questão, chamada tinta básica, é produzida segundo um processo Poisson com taxa 2 litros/hora. Sabendo que estão em operação simultânea 2 máquinas misturadoras determine:

a. Qual o estoque médio de tinta no sistema (tinta básica + tinta em processo) ?

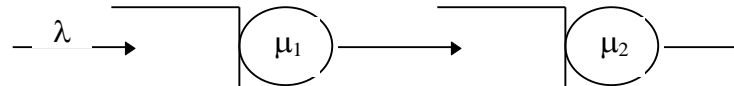
b. O intervalo de tempo decorrido entre o instante que a tinta básica é produzida e o instante que a tinta colorida é obtida ?

c. Para produzir um tipo especial de tinta são necessárias 50 operações da máquina misturadora. Faça uma estimativa do tempo necessário para obter está tinta especial.

35) Dada a rede de filas M/M/1 em série abaixo:

a. Estabeleça as condições de estabilidade para a rede.

b. Esboce o diagrama de transição de estados

c. Calcule a probabilidade de que existam mais de 2 pessoas na rede para λ = 120 c/h, μ_1 = 150 c/h, μ_2 = 180 c/h. (100, 200, 250)

36) Num certo problema de fila os clientes chegam seguindo a distribuição de Poisson com taxa média de 4 c/h. Observou-se que o tempo médio de atendimento é de 10 min. com variância de 25 min^2. Supondo que o modelo $M/E_k/1$ é razoável para este problema encontre o número esperado de clientes no sistema, e o tempo que um cliente típico espera aguardar na fila.

37) A coordenação do concurso vestibular de uma determinada universidade deseja prever a quantidade de fiscais/salas necessários para o bom andamento do concurso. Estão inscritos 5000 (6000) candidatos que serão igualmente divididos pelas diversas salas. Cada candidato ao chegar deverá se dirigir a sua sala e ali deixar um documento de identidade com um fiscal. No ato de devolução da prova, o fiscal deverá conferir o nome nela escrito com o documento, identificar visualmente o candidato e devolver-lhe o documento; este processo leva, em média, 15 segundos por candidato. Ao planejar o processo, baseada em experiência anterior, a coordenação conta com um ritmo de devolução (considerando o universo de todos os 5000 (6000) candidatos) de 80 (100) provas por minuto, em média, nos últimos 15 minutos do prazo de realização da prova. Para evitar tumulto na devolução ela considera que a probabilidade de haver mais de um candidato a espera para entregar a prova não deva exceder 10%. Nestas condições, qual o menor número de fiscais/salas deve ser utilizado ?

38) Uma UTI especializada em transplantes de medula recebe a visita de uma numerosa turma de estudantes de medicina, os quais, para poderem entrar, devem se submeter a um processo de assepsia que envolve um banho e troca de roupa, cada etapa dessas exigindo em média 3 (5) minutos. A turma chega toda de uma vez e aguarda a entrada em uma sala de espera, cada estudante indo fazer a assepsia no momento exato em que o anterior a termina e entra na UTI. Há apenas 2 pacientes internados e junto a cada um está um professor que orienta os alunos no exame do seu paciente. Um aluno, ao entrar na UTI, deve aguardar em uma sala de espera até que algum paciente esteja disponível e, então, se dirige ao mesmo, saindo da UTI após examiná-lo (com isto se evita que mais de uma pessoa entre ao mesmo tempo). A discussão do caso e o exame levam em média 10 minutos ao todo. Considera-se que o regime de trânsito dos estudantes dentro da UTI seja estacionário.

a. Desenhe o diagrama de transição de estados para a situação descrita.

b. Qual o tempo médio de espera de um estudante na sala interna, antes da visita a um paciente ? (use os gráficos fornecidos, indicando neles as leituras efetuadas.)

39) Uma competição de triatlon é organizada da seguinte forma: na primeira etapa uma corrida em pista livre (com qualquer número de corredores) de 20km, a segunda etapa consiste de uma prova de natação na qual os nadadores têm que atravessar (ida e volta) um lago;, devido as condições operacionais apenas dois nadadores podem estar na água simultaneamente, o tempo da travessia do lago (ida ou volta) pode ser considerado exponencial com média de 30 min. Finalmente a terceira etapa é uma corrida de bicicleta, 5 voltas em torno do lago (20km de perímetro), a organização da corrida dispõe de apenas 10 bicicletas para uso dos competidores. Sabe-se ainda que a velocidade média de um competidor a pé é de 40km/h, e de bicicleta é de 80 km/h, considere que o tempo médio entre chegadas dos competidores (após a prova de corrida) é de 45 min. Pede-se:

a. Modele o problema como um sistema de filas.

b. Qual o tempo médio gasto pelo corredor líder ?

c. Qual o tempo médio gasto por um corredor médio ?

40) Uma oficina de máquinas contém um esmeril para amolar os instrumentos de corte das máquinas. Tem que ser tomada uma decisão agora quanto a que velocidade ajustar o esmeril. O tempo necessário para que um operador de máquinas amole seu instrumento de corte tem uma distribuição exponencial, sendo que a média $1/\mu$ pode ser ajustada a qualquer ponto entre 1/2 e 2 minutos, dependendo da velocidade do esmeril. Os custos de operação e manutenção aumentam rapidamente de acordo com a velocidade do esmeril, de modo que o custo estimado por minuto para uma média de $1/\mu$ é de $\$(10\mu^2)$. Os operadores de máquinas chegam para amolar seus instrumentos de acordo com um processo de Poisson a uma taxa média de um a cada 2 minutos. O custo estimado de um operador estar afastado de sua máquina enquanto ocupado no esmeril é de $15,00/minuto. Represente num gráfico o custo total esperado por minuto E(CT) versus μ, e determine o valor ótimo de μ.

41) O proprietário de uma pequena mas procurada banca de jornais atende a clientes a uma média de um a cada 30 segundos, sendo a distribuição exponencial. Os clientes chegam de acordo com um processo Poisson, a uma taxa média de três por minuto, e podem ou não esperar para serem atendidos se o dono estiver ocupado com outro cliente. Um número de clientes preferem não esperar e fazer suas compras em outro lugar. A probabilidade de que um cliente desista é n/3, onde n é o número de clientes já na loja. Que lucro pode o proprietário esperar perder dos clientes que irão fazer suas compras em outro lugar, se o lucro médio por cliente é de $0,30?

42) Um posto de lavagem de carros tem espaço para somente três carros em espera e somente duas plataformas de lavagem. Cada plataforma pode acomodar somente um carro de cada vez. Os proprietários chegam de acordo com um processo Poisson, a uma taxa média de 20 por hora, mas a entrada é proibida sempre que o posto estiver lotado. A lavagem e a limpeza são feitas manualmente e o tempo consumido é exponencialmente distribuído. Sob condições normais, cada plataforma está ocupada com um carro durante uma média de 5 minutos. Entretanto, quando dois ou mais carros estão esperando por atendimento, o procedimento de lavagem é acelerado, reduzindo o tempo médio de atendimento para 4 minutos. Determine:

a. o número esperado de carros no posto de lavagem;

b. o tempo esperado que um carro permanece no posto se ele não é impedido de entrar.

43) Estudos realizados pelo pessoal técnico de um grande supermercado determinaram que 20 % da clientela adquire 10 itens ou menos em uma compra. Se um(a) caixa pode registrar 5 itens por minuto, em média, quantas caixas para uma máximo de 10 itens (caixas expressas) deverão ser instaladas, para que o tempo médio dispendido por um cliente, desde a chegada à fila de caixa até sua saída da mesma não ultrapasse 3 minutos, na previsão de uma demanda média de 750 clientes por hora pelo supermercado ? (Despreze o tempo de pagamento e considere que todos os clientes dessas caixas adquirem exatamente 10 itens).

44) Um excelente restaurante de comida nordestina situado em uma cidade próxima ao Rio de Janeiro tem, em sua cozinha, uma cozinheira e uma ajudante que trabalham em conjunto para atender a uma comanda (uma comanda é o pedido de refeição para uma pessoa). O tempo médio de atendimento de uma comanda é de 10 minutos e 30 segundos e os fregueses chegam ao restaurante à média de 5 por hora, no horário que nos interessa. Apesar da boa reputação da casa, a clientela ameaça

abandoná-la, por causa da demora no atendimento. A gerência pensa então em ampliar a cozinha e colocar outra cozinheira com outra ajudante.

a. Qual o tempo esperado gasto por um cliente no restaurante, nas condições atuais e com a ampliação ?

b. Quantos clientes estarão esperando ser atendidos nos dois casos ?

45) Um caixa de banco trabalha numa agência na qual, frequentemente, 4 caixas estão em atividade ao mesmo tempo (a presença de mais de destes funcionário é menos frequente). Ele foi acometido de uma doença cardíaca e o parecer do médico do banco indicou uma perda de produtividade de 40% (ou seja, ele teria que passar esta parte do tempo inativo). As condições mais exigentes do trabalho ocorrem exatamente quando há apenas 4 caixas na agência; nestes horários, a experiência indica uma demanda média, pelas caixas, de 192 clientes por hora. Cada caixa (inclusive o próprio) pode atender em média 60 clientes por hora. Se ele não puder dispor do repouso necessário, durante o trabalho, terá que ser aposentado. Qual decisão você, que é o gerente da agência, tomará a respeito deste funcionário ?

46) Há uma lei que determina que pessoas idosas devem ter atendimento prioritário nas agências bancárias. O cumprimento rigoroso desta lei obrigaria a não atender qualquer não idoso enquanto houvesse pelo menos um idoso na fila. No entanto, praticamente todas as agências bancárias adotaram um procedimento modificado de atender a lei, que consiste em reservar um ou mais caixas para o atendimento "especial" dos idosos, deixando os demais caixas para o atendimento dos outros clientes.

a. Na sua opinião este procedimento atende a lei ? Porque ?

Suponha que em certa agência chegam, em média, 30 clientes por hora, dos quais 30% são idosos. Há três caixas na agência, dos quais um é destinado exclusivamente para o atendimento de idosos. Os outros dois trabalham no sistema de fila única. O tempo de atendimento médio é de 3 minutos por cliente, idoso ou não.

b. Qual é o tempo médio de permanência (espera + atendimento) de um cliente idoso na agência ? E de um cliente não idoso ? Qual o tamanho médio de cada uma das filas ?

c. Qual seria o tempo médio de permanência de um cliente se todos os clientes fossem, indistintamente, atendidos por todos os caixas ? E o tamanho médio da fila ?

d. Que procedimento de atendimento você recomendaria nesta situação ? Porque ?

e. Se a lei fosse cumprida rigorosamente qual seria o tempo médio de permanência (espera + atendimento) de um cliente idoso na agência ? E de um cliente não idoso ?

47) Uma loja tem dois balconistas, cada um capaz de atender fregueses a uma taxa média de 60 por hora; os tempos de atendimento são exponencialmente distribuídos. A capacidade da loja é de 4 fregueses, com espera do lado de fora proibida. Os fregueses chegam à loja de acordo com um processo do tipo Poisson onde a taxa média de chegadas depende do número de pessoas na loja, da forma: Determine:

Clientes na loja	0	1	2	3	4
Taxa média de chegadas (clientes/hora)	100	125	150	175	200

a. o número esperado de fregueses na loja;
b. o valor esperado do tempo que um freguês deve aguardar por atendimento;
c. a taxa esperada de perda de fregueses devido à limitação de capacidade da loja

48) Cada passageiro de um vôo e sua bagagem deve ser checada para verificar a existência de armas e explosivos. Suponha que no aeroporto de Polândia chegue em média 10 passageiros por hora (com tempos entre chegadas exponenciais). Para verificar os passageiros o aeroporto deve ter um posto de checagem constituído de detector de metais e uma máquina de Raio X para a verificação de bagagem. Quando um posto de checagem está em operação são necessários dois funcionários. Um

posto pode verificar em média 12 passageiros por hora (tempos de verificação exponenciais). Se o aeroporto tem apenas um posto responda:

a) qual a probabilidade que um passageiro tenha de esperar pela verificação ?
b) em média quantos passageiros estarão esperando pela verificação ?
c) em média quanto tempo o passageiro gastará no processo de verificação ?
d) Suponha agora que a administração do aeroporto queira determinar quantos postos deve operar de modo a minimizar custos operacionais e de atraso por um período de 10 anos. Assuma que o custo de 1 hora de atraso de um passageiro é $10, e que o aeroporto funciona 16 h por dia. O custo de aquisição, operação e manutenção de um posto pode ser estimado em $ 1 milhão em um período de 10 anos. Finalmente assuma que cada passageiro escolhe entre os postos com igual probabilidade.

49) Duas barbearias estão situadas lado a lado em um shopping. Cada uma delas comporta até 4 clientes (1 cortando o cabelo e os demais esperando), e qualquer cliente potencial que encontre a barbearia cheia não espera e desiste de cortar o cabelo ali. A barbearia 1 cobra $11 por um corte de cabelo, que demora em média 12 minutos. A barbearia 2 cobra $5 por corte, que dura, em média, 6 minutos. Os clientes potenciais procuram cada uma das barbearias a uma taxa média de 10 clientes/hora. Assumindo tempos entre chegadas e de corte como exponenciais, qual barbearia terá maior receita ?

50) A partir da modernização dos pontos de venda a operação de efetuar o pagamento com cartão de crédito, que era uma operação realizada seqüencialmente a passagem das mercadorias por um caixa de supermercado passou a ser realizada no próprio caixa. Supondo tempos entre chegadas e tempos de serviço exponenciais, e que o tempo de efetuar o pagamento do cartão tem duração equivalente ao tempo de passagem das mercadorias pelo caixa, analise as duas situações, sob o ponto de vista do cliente e do supermercado. Construa os modelos representativos das duas situações e a partir deles faça suas análises.

51) O processo de produção de um produto é constituído de 3 estágios. Em média um novo produto é começado no estágio 1 a cada 6 minutos. O tempo médio de processamento em cada estágio é dado respectivamente por 3 minutos, 2 minutos e 1 minuto. Após passar pelo 3o estágio o produto é inspecionado (assuma que isto não toma tempo); 10% dos produtos são inteiramente reprovados e voltam ao estágio 1 para um completo reprocessamento, 20 % são parcialmente reprovados e voltam para o estágio 2 para sofrerem reprocessamento dos estágios 2 e 3. Em média, quantas unidades do produto estão no sistema ? Assuma que todos os tempos entre chegadas e de serviço tem distribuição exponencial, e que cada estágio seja constituído de um único servidor.

52) A rede de postos Prodóleo combina estações de abastecimento e de lavagem de automóveis em todo o Grande Rio. A Prodóleo dá uma lavagem grátis para cada cliente que completar o tanque de combustível e, para clientes que busca apenas o serviço de lavagem, cobra uma taxa de $5,00. Experiências anteriores mostram que o número de clientes que lavam o carro, após realizar o abastecimento, é aproximadamente igual ao número de clientes que lavam apenas o carro. O lucro bruto médio para os abastecimentos é de $7,00, e o custo da lavagem para a Prodóleo é de $1,00. Os postos Prodóleo permanecem abertos 14 horas por dia. A Prodóleo possui três tipos de unidades de lavagem automática e os postos devem selecionar a unidade preferida. A unidade I pode lavar carros a uma taxa de um carro a cada 5 minutos e é alugada por $120 por dia. A unidade II pode lavar carros a uma taxa de um carro a cada 4 minutos e é alugada por $160 por dia. A unidade III pode lavar carros a uma taxa de um carro a cada 3 minutos e é alugada por $220 por dia. Os postos estimam que os clientes não irão esperar na fila mais do que 5 minutos para lavar seus carros. Um tempo de espera maior irá causar perdas para a Prodóleo, tanto em venda de combustível quanto em lavagens. Se a estimativa de chegadas de clientes que resultam em lavagem é de 10 por hora, qual unidade de lavagem deve ser selecionada ?

53) O gerente de um banco deve determinar quantos caixas devem trabalhar as sextas feiras. Para cada minuto que um cliente passa na fila o gerente imagina que um custo devido ao atraso de $0,05 é incorrido. Uma média de dois clientes por minuto chega ao banco. O tempo que um caixa demora para atender a um cliente é em média 2 minutos. Cada caixa custa ao banco $9,00/hora. Tempos entre chegadas e de atendimento podem ser considerados exponenciais. Para minimizar a soma dos custos de serviço e de atraso, quantos caixas devem trabalhar ?

54) Uma equipe de projeto dispões de 2 estações de trabalho, cada uma delas com um tempo entre falhas exponencialmente distribuído com média de 40 dias. O projeto tem um contrato de manutenção com o fornecedor, que permite que até as duas estações sejam reparadas simultaneamente, quando da ocorrência de defeitos. O reparo de cada estação envolve duas etapas: uma visita técnica, seguida pelo reparo propriamente dito. Os tempos de cada etapa podem pode ser considerados exponencialmente distribuídos com duração média de 10 dias. Desenvolva um modelo de filas para representar o problema e obtenha:
   a) diagrama de transição de estados
   b) as equações de equilíbrio e de recorrência
   c) número médio de estações em operação normal
   d) percentagem do tempo em que todas as estações estão paradas

55) O Programa de Engenharia de Produção está procurando determinar se deve arrendar uma copiadora rápida ou lenta. O valor da hora de trabalho dos funcionários, que dentre outras tarefas irão fazer as cópias é de $15. A copiadora lenta é alugada por $4/hora e toma em média 10 minutos do funcionário para efetuar as cópias (exponencialmente distribuídos). A copiadora rápida custa $15/hora e ocupa o funcionário por 6 minutos em média (também exponencialmente distribuídos). Uma média de 4 funcionários por hora necessitam usar a copiadora (tempos entre chegadas exponencialmente distribuídos). Qual copiadora deve o programa alugar ?

56) Sanduíches Bitoca está querendo determinar quantos atendentes deve disponibilizar durante o horário do almoço. Durante este período uma média de 100 clientes por hora chega ao restaurante. Cada atendente pode servir uma média de 50 clientes por hora. Um atendente custa $5/hora e o custo de um cliente esperando pode ser avaliado em $20/hora. Assumindo que um modelo M/M/S é aplicável, qual o número de atendentes minimiza a soma dos custos de atendente e de atrasos ?

57) Um empreiteiro está definindo sua equipe de trabalho. Ele tem alocado dinheiro suficiente para contratar ou dois pedreiros "Tipo A" ou três pedreiros "Tipo B". A classificação e o pagamento dos pedreiros é feita de acordo com sua eficiência no trabalho. Um mesmo trabalho é realizado por um pedreiro "Tipo A" em 2/3 do tempo gasto por um pedreiro "Tipo B". Assim em uma primeira impressão as duas alternativas parecem iguais. Desenvolva um modelo de filas (Markovianas, onde os pedreiros são os servidores e os trabalhos a efetuar formam uma fila única, com uma disciplina FCFS) para avaliar qual, se for o caso, das alternativas é preferível de forma a manter a fila de tarefas a realizar no mínimo.

58) Um posto de serviço está analisando duas formas de processamento de pedidos de clientes. Opção 1: Três atendentes em paralelo atendendo a uma única fila. Cada atendente preenche completamente todos os formulários, na presença do solicitante. O tempo de processamento é exponencial com média de 15 minutos.
Opção 2: Cada solicitante primeiramente preenche um formulário sem a ajuda do atendente. O tempo para este preenchimento é exponencialmente distribuído com média de 65 minutos. Quando o solicitante completa o preenchimento ele se dirige a uma fila única onde aguardará que um dos três atendentes confira o formulário. Isto demora em média 4 minutos, exponencialmente distribuído.
Os tempos entre chegadas são exponencialmente distribuídos e em média 4,8 clientes chegam a cada hora. Qual das opções permitirá que o solicitante saia mais rapidamente do posto de serviço ?

59) A Sapataria Caroline funciona com um único empregado. A sapataria recebe normalmente pares de sapatos para serem reparados, (em uma base primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido), que chegam segundo um processo Poisson com uma taxa média de 1 par por hora. O tempo para reparar cada pé de sapato individualmente tem uma distribuição exponencial com média de 15 minutos.
   a) Considere a formulação deste problema de filas onde cada sapato individualmete (não o par de sapatos) é considerado o cliente. Para esta formulação construa o diagrama de transição de estados e desenvolva as equações de balanço (sem precisar resolver).
   b) Considere agora que o par de sapatos é o cliente. Para esta formulação construa o diagrama de transição de estados, desenvolva as equações de balanço e obtenha o tempo médio até que um par de sapatos esteja reparado.

60) Um posto de gasolina em um local de grande concorrência lançou a seguinte campanha: Se o cliente tiver de esperar para abastecer o preço da gasolina é de $1,00 por litro. O preço normal da gasolina é de $1,20/litro. Com está promoção os clientes chegam ao posto segundo um processo Poisson com taxa média d 15 por hora. O tempo de serviço na bomba (para facilitar considere uma única bomba) é exponencialmente distribuído com média de 3 minutos. Em vista do preço atrativo todos os clientes que chegam esperam pelo atendimento. Determine o preço esperado da gasolina que é vendida.

61) Na rodovia do Vai-e-Vem, que dá acesso ao Parque Ecológico do Lobo Guará, foi instalada uma única cabine de pedágio. Na época da instalação foi imaginado que não haveria tráfego suficiente para justificar mais que uma cabine, mas o turismo ecológico tem aumentado muito recentemente. Atualmente, (nos períodos de pico, que são os que nos interessam) há um fluxo de passagem de 210 carros/hora, enquanto o tempo médio de serviço é de 15 segundos. De forma a diminuir os intermináveis engarrafamentos que passaram a ocorrer, duas propostas foram feitas. A primeira consiste em instalar uma nova cabine idêntica a primeira (assuma que o tráfego irá se dividir igualmente, porém de forma aleatória entre as duas cabines). A segunda é instalar uma cabine automática, que opera com cartão pré-pago. Nesta cabine o tempo médio de serviço será de somente 5 segundos, mas apenas um terço das chegadas (selecionadas aleatoriamente) terão o cartão pré-pago. A medida de performance é o tempo médio que as pessoas dispendem para passar pelas cabines.

a) Usando o(s) modelo(s) apropriado de filas, estime os tempos médios para as duas propostas.
b) Reconhecendo que os tempos de serviço provavelmente não são exponenciais, mas que certamente também não são constantes, avalie se e como os resultados de (a) devem ser modificados.
c) Levando em conta outros fatores que podem ter sido negligenciados, qual usa recomendação?

62) Considere dois servidores. Uma média de 8 clientes por hora chegam do exterior para o servidor 1 e uma média de 17 clientes por hora chegam do exterior para o servidor 2. Tempos entre chegadas são exponenciais. O servidor 1 pode servir, com uma taxa exponencial, 20 clientes por hora, enquanto o servidor 2 pode servir, também com uma taxa exponencial, 30 clientes por hora. Após completar o serviço no servidor 1 metade dos clientes deixa o sistema enquanto a outra metade vai para o servidor 2. Após completar o serviço no servidor 2, 3/4 dos clientes deixa o sistema e 1/4 retorna ao servidor 1.

a) Qual a fração do tempo o servidor 1 está ocioso ?
b) Qual o número médio de clientes em cada servidor ?
c) Qual o tempo médio que um cliente gasta no sistema ?
d) Como se alteram as respostas (a) até (c) se o servidor 2 puder atender, em média, a apenas 20 clientes por hora.

63) Meu escritório usa 2 lâmpadas. Em média, uma lâmpada dura 22 dias (exponencialmente distribuído). Quando uma lâmpada se queima em demoro em média 2 dias (exponencialmente distribuído) para substituí-las.

a) Construa o diagrama de transição de estados para o problema.
b) Determine qual a fração do tempo o escritório está com luminosidade máxima, média e mínima.

64) O programa de engenharia de produção aceita a cada ano 20 novos alunos de doutorado. Se um aluno de doutorado gasta em média 5 anos para concluir seu curso, qual o número esperado de alunos de doutorado no programa. Use o modelo de filas adequado para justificar sua resposta.

65) Considere um sistema de filas que tenha duas classes de clientes, dois caixas provendo serviço e não admita filas. Clientes potenciais de cada classe chegam segundo processos Poisson, com taxa média de chegada de 10 clientes por hora para a classe 1 e 5 clientes por hora para a classe 2, mas estas chegadas são perdidas para o sistema se não puderem entrar imediatamente em serviço. Cada cliente da classe 1 que entra no sistema poderá receber serviço de qualquer um dos servidores que estiver desocupado, os quais tem tempo de serviço com distribuição exponencial com média de 5 minutos. Cada cliente da classe 2 que entra no sistema requer o uso simultâneo dos dois caixas (os

dois caixas juntos agem como se fossem um único servidor) e o tempo de serviço tem distribuição exponencial com média de 5 minutos. Assim, um cliente desta classe que chega será perdido para o sistema a menos que ambos os caixas estejam desocupados para começar o serviço imediatamente.

a. Formule um modelo de filas, como um processo de Markov de tempo contínuo, definindo os estados e construindo o diagrama de transição de estados.
b. Descreva como a formulação obtida em (a) pode ser ajustada ao formato de um processo nascimento e morte.
c. Use o modelo nascimento e morte para calcular a distribuição de regime permanente do número de clientes de cada classe no sistema.
d. Para cada uma das classes de clientes qual é a fração do número esperado de clientes que não são admitidos no serviço ?

66) Uma farmácia possui 3 caixas. O gerente usa a seguinte estratégia de operação pra a abertura das caixas: se o número de clientes na farmácia for menor ou igual a 2, a farmácia opera com apenas um caixa; se o número de clientes for igual a 3 ou 4, a farmácia opera com dois caixas; se o número de clientes for maior ou igual a 5, a farmácia opera com três caixas. Os clientes chegam na farmácia de acordo com uma distribuição de Poisson, com taxa de 10 clientes por hora. O tempo de atendimento de um cliente em um caixa segue uma distribuição exponencial, com tempo médio de 12 minutos por cliente.

a) Qual a probabilidade de apenas um caixa se aberto?
b) Quantos caixas ficam em média fechados?

Exercícios de filas - respostas

1) V F V F F V F V V F V F V

2)

3)

4)

5)

6)

7) A - B- Não se alteram

8)

9)

10)

11)

12)

13) $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, Exponencial

14)

15) a e b) 1,3 min.

16) a) 4h24min. b) 49 min c) 3h42min.

17) a) 40,2% b) 2,25 e 14,06 carros c) 1h 5min.

18) a) 0,98 cestos b) 9,4 carroças c) 7 escravos d) 27,44 cestos e 9,4 carroças

19) a) 2h40' b) 7.5% c) 1,7 pacientes

20) a) 16,1 pessoas b) 4,45 pessoas c) 3,05 pessoas d) 14'14" e) 7'56" f) 4%

21) 0,5 horas

22) Manteria a equipe inalterada

23) 17,5 clientes/hora

24) W = 4 horas

25) a) 12min. b) 3 pessoas

26) 51,9%

27) 3,3 frascos

28) $P_n = (1- \rho)/(1- \rho + \rho_0)\ \rho_0\ \rho^{n-1}$

29) 3,8 dias

30) a) 16,7% b) 8% c)3,4min.

31) b) 12' c) infinito c) Processo Poisson

32) a) 8 pessoas b) 2h 40 min.

33) 4 bombas C(3) = $ 175.861.704 C(4) = $ 121.254.600

34)

35)

36) 1,5 clientes, 12,5 min.

37) 64 fiscais

38) 14 min.

39) b) 2h 45' c) 3h 50'

40) 1'

41) $ 25.58 /h

42) a) 1,96 carros b) 5,86'

43) 11 caixas

44) a) 1,4h e 0,24 h   b) 6,125 clientes e 0,325 clientes

45) Aposentar o caixa pois um caixa passa ociosa 22% do tempo (, 40%)

46)

47) a) 2,5 clientes, b) 97,45 clientes, c) 65 cl./h.

FORMULÁRIO DE TEORIA DE FILAS

Fórmulas Gerais

$L = \lambda W = \sum nP_n$ $L_q = \lambda W_q = \sum (n-s)P_n$ $W = W_q+(\mu)^{-1}$ $\lambda = \sum \lambda_n P_n$
$\mu = \sum \mu_n P_n$ $\rho = \lambda / s\mu$

Fórmulas M/M/1

$P_n = (1-\rho)\rho^n$ $L = \rho/(1-\rho)$ $W = (\mu - \lambda)^{-1}$

Fórmulas M/G/1

$P_0 = (1-\rho)$ $L_q = (\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2) / 2(1-\rho)$

Fórmula Erlang $L_q = (k+1) /2k \quad \rho^2 / (1-\rho)$

Fórmula M/M/S

Onde $P(j \geq s)$ é dado pela tabela abaixo:

$$W_q = \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda}$$

ρ	S=2	S=3	S =4	S=5	S=6	S=7
0,10	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,20	0,07	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
0,30	0,14	0,07	0,04	0,02	0,01	0,00
0,40	0,23	0,14	0,09	0,06	0,04	0,03
0,50	0,33	0,24	0,17	0,13	0,10	0,08
0,55	0,39	0,29	0,23	0,18	0,14	0,11
0,60	0,45	0,35	0,29	0,24	0,20	0,17
0,65	0,51	0,42	0,35	0,30	0,26	0,21
0,70	0,57	0,51	0,43	0,38	0,34	0,30
0,75	0,64	0,57	0,51	0,46	0,42	0,39
0,80	0,71	0,65	0,60	0,55	0,52	0,49
0,85	0,78	0,73	0,69	0,65	0,62	0,60
0,90	0,85	0,83	0,79	0,76	0,74	0,72
0,95	0,92	0,91	0,89	0,88	0,87	0,85